RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° febbraio 1920.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Invarianti affini-differenziali di una superficie.* Nota del Corrispondente Guido Fubini.

Da una recente Memoria di R. Weitzenböck (1), *Zur projektiven Differentialgeom. analytischer Flächen*, apprendo che in Memorie dei signori Pick, Blaschke, Radon, pubblicate nei Leipziger Berichte (1917-18), non giunti ancora a Torino, è studiata la teoria degli invarianti differenziali di una superficie rispetto al gruppo delle trasformazioni affini, che conservano i volumi. Ora, tanto tale studio, quanto quello relativo al gruppo affine più generale, si compiono nel modo più completo non solo per le superficie, ma anche per le ipersuperficie, partendo dai principî svolti nei miei lavori citati a pie' di pagina. Io non voglio pubblicare qui dei risultati prima di aver potuto consultare tali Memorie: voglio soltanto esporre il metodo, illustrandolo con l'esempio delle superficie. Nei miei lavori si dimostra che

(1) Sitzungsber. der Akad. der Wissenschaften in Wien (Abt. II*a*, Bd. 127, Heft 8, 1918). Da questa Mem. appare che l'A. non conosce i miei recenti lavori pubblicati in questi Rendiconti e in quelli del Circ. Matem. di Palermo, ciò che è ben naturale, data l'interruzione degli scambî internazionali; mi sembra però anche che gli siano sfuggite le più antiche ricerche di Darboux e Segre, e gli studî fatti dal Wulczynski in coordinate curvilinee qualsiansi. Tale Mem. non risolve però il problema di caratterizzare completamente una superficie nel gruppo proiettivo. Cfr., per l'elenco completo dei miei lavori su tale argomento, la mia Mem. *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, nei Rend. del Circ. Matem. di Palermo (tomo 43).

ogni superficie od ipersuperficie si caratterizza nel gruppo proiettivo con due o tre forme differenziali del primo ordine (una o due quadratiche ed una cubica); date le quali, si ottiene la superficie od ipersuperficie, integrando un sistema di equazioni ai differenziali totali, a cui soddisfano le coordinate omogenee di un punto della ipersuperficie. I coefficienti di tali equazioni differenziali *lineari* sono completamente determinati dai coefficienti di tali forme differenziali. Nelle mie Mem. cit. si studia come generalmente si possa togliere l'indeterminazione dovuta al fattore arbitrario, per cui si possono moltiplicare le coordinate omogenee di punto; ma per lo studio degli invarianti di una superficie nel gruppo affine, tale indeterminazione si deve naturalmente togliere in altro modo. Poichè in tale studio sono elemento essenziale le coordinate *non omogenee*, noi potremo ricorrere a *coordinate omogenee, una delle quali sia uguale ad* 1. Due ipersuperficie saranno affini soltanto quando coincideranno le corrispondenti equazioni differenziali.

Così, p. es., per una superficie riferita alle assintotiche, le forme

$$(1)\quad 2\beta\gamma\, du\, dv \qquad (2)\quad 2\beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3)$$

sono invarianti per deformazioni proiettive, e costituiscono quello che io perciò chiamo l'elemento lineare proiettivo, invariante in particolare per collineazioni: esse, uguagliate a zero, definiscono le assintotiche e le linee di Darboux-Segre. Le equazioni differenziali corrispondenti sono:

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v} \quad ; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \gamma\frac{\partial x}{\partial u} + \varepsilon\frac{\partial x}{\partial v},$$

ove α, ε dipendono dalla terza forma (quadratica), che qui non è necessario ricordare, e soddisfano, per le condizioni di integrabilità, alla $\alpha'_v = \varepsilon'_u$, cosicchè

$$(4)\qquad d\psi = 2(\alpha\, du + \varepsilon\, dv)$$

è un differenziale esatto. Esso non è però *intrinseco*, perchè cambia di significato quando si cambiano i parametri delle assintotiche, cioè quando si muti u in una funzione U della u, e v in una funzione V della v; è facile invece verificare, e noi controlleremo, che

$$(5)\qquad d\varphi = 2(\alpha\, du + \varepsilon\, dv) - 2d\log\beta\gamma$$

(pure essendo ancora esatto) ha significato *intrinseco*.

Dunque nella geometria, rispetto al gruppo affine, alla terza forma si può sostituire la forma *lineare* (5), che è un differenziale *esatto*! *Due superficie saranno affini soltanto quando abbiano uguale elemento lineare proiettivo, e abbiano uguale forma* $d\varphi$. Cerchiamo il significato geometrico della φ.

Se $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ è l'elemento lineare di Gauss, ed $\left\{ \begin{matrix} i\,h \\ l \end{matrix} \right\}$ ne sono i simboli di Christoffel, è

$$\alpha = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} , \quad \beta = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} , \quad \gamma = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} , \quad \varepsilon = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} .$$

Le equazioni di Gauss-Codazzi si possono scrivere nella forma

$$\frac{\partial \log D' \sqrt{EG - F^2}}{\partial u} = 2\alpha \quad , \quad \frac{\partial \log D' \sqrt{EG - F^2}}{\partial v} = 2\varepsilon \quad , \quad \frac{D'^2}{EG - F^2} = -K ,$$

ove K è la curvatura totale e $2D'\,du\,dv$ è la seconda forma di Gauss.

Detti ϱ_1 e ϱ_2 i raggi di curvatura ordinaria (o geodetica) delle assintotiche, si ha

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{EG - F^2}{(EG)^{3/2}} \beta\gamma$$

donde:

$$\left(\frac{1}{\beta\gamma}\right)^2 = \frac{(EG - F^2)^2}{(EG)^3} (\varrho_1 \varrho_2)^2 = \frac{1}{EG} (\varrho_1 \varrho_2)^2 \operatorname{sen}^4 \omega ,$$

e quindi:

$$d\varphi = d \log \frac{D'(EG - F^2)^{5/2}}{(EG)^3} (\varrho_1 \varrho_2)^2 = d \log \left[\sqrt{-K} \operatorname{sen}^6 \omega \, (\varrho_1 \varrho_2)^2 \right] \ (^1)$$

ove ω è l'angolo delle due assintotiche. Questo valore di $d\varphi$ è scritto così in forma tale, che è facilissimo esplicitarlo in coordinate curvilinee *qualsiasi*; cosicchè il nostro studio vale senz'altro, *qualunque sia il sistema di linee coordinato*.

Affinchè poi il gruppo affine, che trasforma l'una nell'altra le due superficie, conservi i volumi, sarà ancora necessario e sufficiente che D' abbia ugual valore in punti omologhi delle due superficie: ossia, in forma intrinseca, che $\frac{D'}{\beta\gamma}$ sia uguale in tali punti omologhi. Si noti che

$$\frac{D'}{\beta\gamma} = \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\sqrt{EG - F^2}^3}{\sqrt{EG}^3} \varrho_1 \varrho_2 = \sqrt{-K}\, \varrho_1 \varrho_2 \operatorname{sen}^3 \omega .$$

(1) Ne segue che il rapporto R dei valori di $\sqrt{-K}\,(\varrho_1 \varrho_2)^2 \operatorname{sen}^6 \omega$ in due punti di una superficie si conserva per trasformazioni affini; e che *tutti* gli invarianti per affinità si riducono all'elemento lineare proiettivo, e a questo rapporto R.

Fisica. — *Sulla gravitazione.* Nota VII del Corrispondente Q. Majorana.

Risultati delle osservazioni. — Descritti nella precedente Nota la disposizione da me adottata per le presenti ricerche ed il metodo scelto per le singole osservazioni, non è mia intenzione di riportare tutte queste, anche perchè esse ammontano a cinque o sei migliaja di letture di oscillazioni. Dirò pertanto che lo scopo di un numero tanto elevato non è stato quello di ottenere una media estremamente precisa delle varie osservazioni, ma sibbene l'altro di perfezionare continuamente la disposizione ed il metodo stesso. Ho esposto infatti i più importanti artificî adottati per eliminare o controllare le varie cause di errore; di altri dirò in fine di questa esposizione, e di altri, meno importanti, tacerò per brevità. Ma tutti, nel loro insieme, furono escogitati poco per volta e man mano che, in più di un anno di continuo lavoro sperimentale, andavo rintracciando quelle cause di errore. Così, mentre nel marzo 1919 mi era sembrato di poter concludere per la esistenza del fenomeno di un dato segno, mi accorsi poi di taluni difetti; dopo averli eliminati, potei verificare il fenomeno previsto, tanto per il suo segno quanto, all'incirca, per la sua misura. Per cui le osservazioni, se sono state sempre a me utili, non servono tutte a fissare ora i risultati che mi sembrano definitivi.

Le misure che ora riporterò sono le ultime da me eseguite, e cioè quelle dei giorni 20 e 21 luglio 1919, nei quali giorni vi fu in Torino sciopero generale; e potevo quindi usufruire di un periodo di quiete meccanica quasi assoluta, se tuttavia si eccettua il passaggio di qualche raro camion militare. Tali misure sono state eseguite dopo che io ebbi raggiunto la massima perfezione nel funzionamento del mio apparecchio, e furono precedute da osservazioni preliminari, che non riporto, fatte nei giorni e nelle notti immediatamente precedenti (1).

A titolo di esempio, trascrivo completamente le prime letture fatte la mattina del giorno 20 luglio. Le iniziali C, S, sono abbreviazioni di *con* o *senza* mercurio; ricordo inoltre che la scala, su cui batte il raggio riflesso da S, ha lo zero in alto: ciò vuol dire che un accrescimento nella cifra che indica la posizione di riposo della bilancia, corrisponde ad un abbassamento della sfera di piombo m, cioè ad un apparente suo aumento di peso.

(1) Come è noto, era stata stabilita con parecchi giorni di precedenza l'effettuazione del detto sciopero.

Osservazioni del 20 luglio 1919.

N. d'ord.	Ora	Natura delle osservazioni	Oscillazioni Alto	Oscillazioni Basso	Pos. riposo	Effetto
1.	8 52′ 0″	C	219,8 220,0	220,9	220,40	—
2.	8 58′ 40″	S	221,0 220,9	222,3	221,62	—
3.	9 5′ 20″	C	220,4 220,9	222,6	221,62	— 0,61
4.	9 12′ 0″	S	221,9 222,2	223,0	222,52	— 0,45
. . . . .						
. . . . .						

Ometto le altre osservazioni fatte nel corso della giornata del 20 VII e del successivo 21. Si vede che dalle prime tre serie di letture (1, 2, 3) si ha una prima determinazione dell'effetto: 0,61; da 2, 3, 4 se ne ha una seconda: 0,45; ecc. Il segno — preposto ad esse, sta ad indicare che la presenza del mercurio fa apparire la sfera di piombo più leggera. Nella tabella seguente riporto tutte le determinazioni dell'effetto, fatte nelle due giornate predette, nessuna esclusa; le linee di separazione indicano il termine di una serie di misure:

20 luglio	— 0,31	— 0,37	— 0,32	— 0,36
— 0,61	— 0,46	— 0,29	— 0,38	— 0,31
— 0,45	———	— 0,25	— 0,28	— 0,20
— 0,40	— 0,23	0,23	— 0,38	— 0,22
— 0,44	— 0,38	— 0,30	— 0,19	— 0,39
— 0,52	— 0,67	— 0,27	— 0,25	— 0,35
— 0,46	———	— 0,18	— 0,35	— 0,42
— 0,42	— 0,42	— 0,20	— 0,32	— 0,50
— 0,39	— 0,39	———	— 0,36	— 0,35
— 0,50	— 0,06	21 luglio	———	— 0,30
— 0,39	— 0,23	— 0,84	— 0,40	— 0,30
— 0,30	— 0 30	— 0,31	———	— 0,28
— 0,22	— 0,38	— 0,64	— 0,40	———

La media di queste 57 osservazioni è

$$-\text{mm. } 0{,}358 \pm 0{,}012,$$

dove l'errore probabile 0,012 è stato calcolato coi minimi quadrati. Si vede dunque come costantemente tutte le fatte osservazioni, nessuna esclusa, in-

dichino diminuzione di peso della sfera di piombo, per la presenza del mercurio.

Per meglio rendermi conto della fatta determinazione, costruisco i diagrammi della fig. 5. Come ascisse sono riportati i progressivi intervalli di tempo eguali: $C_1 S_2$, $S_2 C_3$, $C_3 S_4$, $S_4 C_5$, . . . , che intercedono fra le successive determinazioni delle posizioni di riposo della bilancia; come ordinate, i valori di tali determinazioni. Per evitare confusione, ciascuna serie è spo-

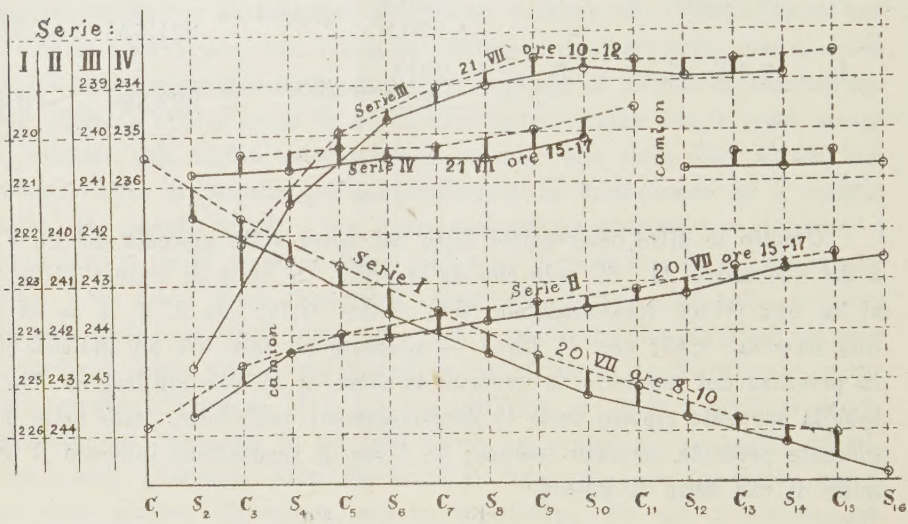


Fig. 5.

stata sulle proprie ordinate. Per ciascuna serie si hanno due spezzate: quella a tratto continuo si riferisce alle osservazioni *senza* mercurio, e quella tratteggiata a quelle *con* mercurio. Si vede che le due spezzate, corrispondenti a ciascuna serie, hanno andamenti irregolari ma all'incirca paralleli, talchè la spezzata *senza* mercurio è sempre al disopra della spezzata *con* mercurio. Quell'andamento irregolare dipende, come già si disse, dalle perturbazioni termometriche sulla bilancia. Le medie numeriche (salvo cinque) scritte nella precedente tabella, corrispondono ai tratti verticali segnati nella fig. 5, fra le due spezzate di ciascuna serie di osservazioni; le cinque medie mancanti sono state omesse per semplicità di disegno, e non perchè discordanti.

Dalle serie II e IV osservate, rispettivamente, nei pomeriggi dei giorni 20 e 21 luglio, si rileva l'effetto del passaggio di due camions; in particolare per la IV, le due spezzate subirono un salto brusco, tale da far perdere due medie.

Prima, fra e dopo le serie di osservazioni, le di cui medie sono state riportate, ho eseguito determinazioni della sensibilità della bilancia, i cui

risultati non trascrivo, per brevità, integralmente: la loro media è di 171 mm. per mg. Per cui, al constatato spostamento medio della posizione di equilibrio della bilancia, sotto l'influenza della presenza del mercurio, corrisponde una apparente diminuzione di peso della sfera di piombo di

$$\text{mg.}\ \frac{0{,}358 \pm 0{,}012}{171} = \text{mg. } 0{,}00209 \pm 0{,}00007\ ;$$

dico *apparente*, perchè occorre tener conto di parecchie cause di errore, come ora farò vedere.

Ricerca delle cause di errore. — In una ricerca come la presente, che porta cioè alla constatazione di un fenomeno di estrema piccolezza, le cause che possono indurre in errore possono essere, necessariamente, molte. Di parecchie di esse si è già avuto occasione di dire; e propriamente di quelle che, con opportuni accorgimenti sperimentali, da me già indicati, potevano essere eliminate. Ma altre ne permangono, che, se non tenute presenti, possono falsare il risultato numerico ottenuto. Onde è che occorre studiarle con precisione, affinchè questo venga esattamente corretto. Altre cause possono sospettarsi, che peraltro, esaminate attentamente, non possono alterare sensibilmente il risultato ottenuto. Delle une e delle altre dirò ora rapidamente.

Dissimetria di masse. — Malgrado tutte le cautele adottate, può avvenire che la sfera di piombo sia soggetta ad un'azione newtoniana, non esattamente equilibrata, da parte del mercurio circostante. Si è detto che ragioni costruttive mi fanno ritenere che, nell'aggiustaggio delle varie parti dell'apparecchio, non vi sieno errori lineari superiori a circa 2/10 di mm.; ma occorre rendersi conto dell'influenza di questi errori, se mai essi esistessero realmente. Al riguardo, suppongo anzitutto esattamente di forma sferica ed omogenea la massa di piombo m, pesante 1274 gr.; esattamente sferico l'involucro V; ed esattamente cilindrico e verticale il vaso di legno U. Queste ipotesi sono lecite, giacchè, se anche esse non rispondessero al vero, l'aggiustaggio reciproco di tali parti insieme, può causare errori più gravi. Di questa possibilità occorre dunque discorrere prima; e se tali eventuali errori fossero riconosciuti trascurabili, a maggior ragione lo sarebbero quelli provenienti dalle imperfezioni costruttive dei varii pezzi.

Ora, considerando i centri di figura C_1, C_2, C_3, rispettivamente della sfera di piombo m, dell'involucro V, del cilindro U, occorrerebbe, per l'assoluta simmetria, che tali punti fossero coincidenti. Ma potrà avvenire, per errore, che:

1) C_1 e C_2 sieno spostati sulla stessa verticale;
2) C_1 e C_3 » » » » »
3) C_1 e C_2 » » su di un piano orizzontale;
4) C_1 e C_3 » » » » »

Per quanto riguarda gli errori 3 e 4, si comprende subito che essi non debbono preoccupare. Infatti, se mai, la massa di mercurio eserciterebbe un'azione sulla sfera di piombo pochissimo diversa da zero, ma orizzontale; per cui la componente di questa, secondo la verticale e quindi sul coltello di destra della bilancia, sarebbe esattamente nulla, salvo errori di ordine assolutamente inferiore, dovuti allo spostamento laterale, per tale forza, della sfera di piombo, che è inutile di calcolare.

Per quanto concerne l'errore 1, faccio le seguenti considerazioni: Sia P (fig. 6) il centro di m, nel quale si può considerare concentrata la massa

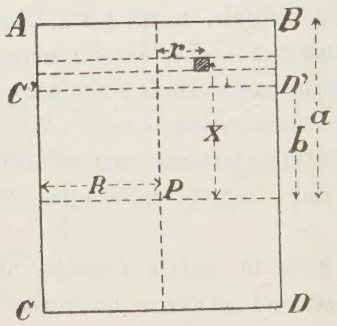


Fig 6.

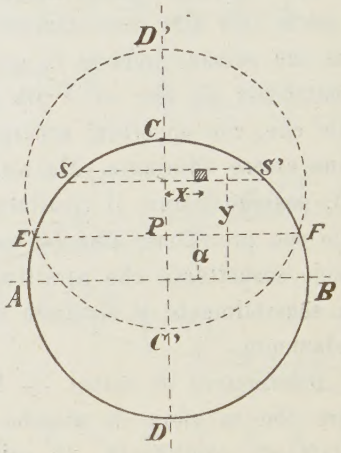


Fig. 7.

sferica di piombo. Indichino AB e CD le basi del cilindro di mercurio, ossia i livelli che vengono raggiunti nelle singole esperienze. Esse, per la ipotesi che ora faccio, non sieno esattamente simmetriche rispetto a P. Sia C′ D′ parallela ad AB, e simmetrica di CD rispetto a P. Si tratta di determinare l'azione, su P, della massa cilindrica di diametro AB e di spessore AC′. Sia a la distanza di P dal piano AB, e b quella da C′ D′. Considero uno strato infinitesimo del cilindro attraente, parallelo alle sue basi e di spessore dx, e distante x da P. Di questo strato, una corona circolare di raggio r ha su P un'azione attrattiva

$$df = 2\pi k m \vartheta x\, dx \frac{r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}};$$

dove k è la costante di attrazione, m la massa di piombo, ϑ la densità del mercurio. L'azione di tutto lo strato di spessore dx, essendo R il raggio del cilindro, sarà

$$f = 2\pi k m \vartheta x\, dx \int_0^R \frac{r\, dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = 2\pi k m \vartheta \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) dx .$$

E l'azione di tutto il cilindro ABD'C' sarà data da

$$F = 2\pi k m \vartheta \int_b^a \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right) dx =$$

$$= 2\pi k m \vartheta \left(a - b - \sqrt{a^2 + R^2} + \sqrt{b^2 + R^2}\right).$$

Nel mio apparecchio le dimensioni del cilindro compreso tra il livello inferiore ed il superiore sono: $R = 10{,}925$ cm.; $2a = 21{,}170$ cm. Vediamo ora quale sarebbe l'influenza della dissimetria, p. es., di 1 mm. fra i due livelli. Si avrà: $a = 10{,}585$ cm.; $b = 10{,}485$. Applicando la relazione trovata, nella quale si pone $k = 6{,}7 \cdot 10^{-8}$; $m = 1274$ gr; $\vartheta = 13{,}60$, si ha $F = 0{,}00021$ dine (ovvero, all'incirca, milligrammi).

Siccome l'errore di aggiustaggio dei livelli non può superare, per quanto si è detto, i 2/10 di mm., si può ritenere che le determinazioni fatte possano essere errate al più per un quinto del precedente valore, cioè di circa mg. 0,00004; e ciò per quanto riguarda l'errore 1.

Circa l'errore 2, sia il cerchio ACBD (fig. 7) la traccia dell'involucro V. Il centro della sfera m si trovi alquanto spostato, p. es., verso l'alto, in P. Conduco il cerchio ED'FC' simmetrico del primo rispetto alla corda EF. Supposto il resto del mercurio disposto simmetricamente a P, su questo punto agisce una forza dovuta alla massa dissimetrica del solido ottenuto per la rotazione della superficie ED'FC, intorno a CD'. Essa sarà diretta secondo DD', e risulterà uguale alla differenza delle forze che le calotte sferiche PED'F e PECF, supposte piene, eserciterebbero su P. Determino prima l'azione della calotta PECF; dico a la distanza fra P ed il centro di ACBD, e considero uno strato infinitesimo orizzontale SS', di spessore dx, distante y dal detto centro. Un elemento circolare di raggio x, di tale strato avrà un'azione su P data da

$$df = \frac{2\pi k m x\, dx\, dy\, \vartheta (y - a)}{[x^2 + (y - a)^2]^{3/2}},$$

dove, al solito, k è la costante di attrazione, m la massa concentrata in P, e ϑ la densità del mercurio. L'azione di tutto lo strato SS' sarà

$$f = 2\pi k m \vartheta (y - a)\, dy \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{x\, dx}{[x^2 + (y - a)^2]^{3/2}} =$$

$$= 2\pi k m \vartheta\, dy \left\{1 - \frac{y - a}{\sqrt{R^2 - 2ay + a^2}}\right\}.$$

L'azione F_1 di tutta la calotta sferica PECF si ottiene, integrando questa espressione fra a ed R:

$$F_1 = 2\pi k m \vartheta \left(\int_a^R dy - \int_a^R \frac{y-a}{\sqrt{R^2 - 2ay + a^2}}\, dy \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \pi k m \vartheta \frac{1}{a^2} \left\{ R^3 - a^3 - (R^2 - a^2)^{3/2} \right\}.$$

L'azione della calotta PED'F su P si otterrà ponendo $-a$ al posto di a, e quindi

$$F_2 = \frac{2}{3} \pi k m \vartheta \frac{1}{a^2} \left\{ R^3 + a^3 - (R^2 - a^2)^{3/2} \right\}.$$

E, finalmente, l'azione F cercata sarà la differenza fra queste azioni, e cioè

$$F = F_2 - F_1 = \frac{2}{3} \pi k m \vartheta\, a.$$

Questo risultato è, dal punto di vista analitico, interessante per la sua semplicità: esso è indipendente da R.

Suppongo ora, come per l'errore 1, che si abbia uno spostamento del centro della sfera, rispetto all'involucro, di 1 mm.; si ha $a = 0{,}1$ cm. Sarà quindi $F = 0{,}00024$ dine (o, all'incirca, mg.). Anche qui l'errore di 1 mm. è superiore al possibile, che al più è di circa 0,2 mm. Per cui si deve ritenere che, per quanto riguarda l'errore 2, la fatta determinazione possa essere errata, al più, per circa mg. 0,00005.

Complessivamente, è certo che gli errori di aggiustaggio dei livelli del mercurio e dell'involucro V non possono influire per un valore superiore a

$$\text{mg. } 0{,}00004 + 0{,}00005 = \text{mg. } 0{,}00009.$$

Il calcolo precedentemente eseguito permette anche di determinare l'azione attrattiva di metà della massa di mercurio sulla sfera di piombo. Ciò, come si ricorda, serve, in un metodo già indicato, per la determinazione della sensibilità della bilancia. Ora tale azione risulta eguale alla differenza tra l'azione del cilindro ABC'D' (fig. 6), per il quale si supponga $b = 0$, e quella di una calotta semisferica (di diametro uguale a quello dell'involucro V della fig. 4) sul suo centro. Quest'ultima si ottiene ponendo $a = 0$ nella espressione già trovata di F_2. Veramente, eseguendo tale sostituzione, si vede che questa quantità assume valore indeterminato; ma è facile riconoscere che il suo limite, per $a = 0$, è dato da $\pi k m \vartheta R$. Per cui, l'azione della metà del mercurio, ricercata, sarà

$$F_m = \pi k m \vartheta (2a + 2R - 2\sqrt{a^2 + R^2} - r);$$

e tale formula è stata utilizzata a suo tempo.

Spostamento dello zero. — Una causa di errore, che si può anche definire dissimetria di massa, è dovuta alla impossibilità di ottenere costantemente la perfetta centratura della sfera di piombo, rispetto all'involucro V, in conseguenza della variabilità della posizione di riposo della bilancia; l'errore è peraltro piccolissimo e si corregge facilmente.

Si osserva intanto che, se la sfera *m* fosse esattamente situata nel centro di gravità del mercurio asportabile, ciò corrisponderebbe, per gli aggiustaggi preventivi da me eseguiti, al fatto che l'indice H a lettura diretta della bilancia (fig. 4) sia sullo zero della rispettiva scala, e che l'indice luminoso riflesso dallo specchio S, sia sul punto di mezzo della scala verticale, lunga 500 mm., cioè a 250 mm. Ma, a causa della variabilità dello zero, si constata di solito uno spostamento, piuttosto piccolo, ma variabile da serie a serie di osservazioni; ciò, del resto, si rileva dai diagrammi della fig. 5. Per quanto riguarda tutte le osservazioni riportate, facendo la media tra le posizioni di riposo della bilancia nei due giorni 20 e 21 luglio, si ha la cifra 234,9. Per cui, si deve tener conto dello spostamento $250{,}0 - 234{,}9 =$ $=$ mm. 15,1, cioè di un rialzo da determinare, della sfera di piombo, rispetto al centro di simmetria. Conoscendo la distanza della scala dalla bilancia (12 metri), e la lunghezza del braccio di questa (13 cm.), si trova che quel rialzo è, in media, di

$$\text{mm.}\ \frac{15{,}1 \cdot 130}{12000 \cdot 2} = \text{mm. } 0{,}08.$$

Questo errore di aggiustaggio ha due effetti distinti. Considerando lo spostamento della sfera rispetto alle basi del cilindro di mercurio, esso fa nascere una forza verso il basso, dovuta all'attrazione di uno spessore di mercurio in più dalla parte bassa, *doppio* dello spostamento osservato; il valore di tale forza è, per quanto si è visto,

$$\text{mg. } 0{,}08 \cdot 2 \cdot 0{,}0002 = \text{mg. } 0{,}000032.$$

D'altro canto, lo spostamento verso l'alto, rispetto all'involucro V, fa nascere una forza, diretta appunto verso l'alto, che è proporzionale allo spostamento stesso. Tale forza è

$$-\ \text{mg. } 0.00024 \cdot 0{,}58 = -\ \text{mg. } 0{,}000019.$$

Per cui la forza complessiva, risultante dai due effetti riportati, è

$$\text{mg. } 0{,}000032 - 0{,}000019 = \text{mg. } 0{,}000013.$$

Azione newtoniana del mercurio sulla tara e del suo serbatoio su entrambe le sfere di piombo. — Queste azioni sono inevitabili, in conseguenza della speciale conformazione dell'apparecchio; ma d'altronde se ne tiene facilmente conto. Consideriamo anzitutto il mercurio di massa M, che

si trova nel recipiente U. Si può, con sufficiente approssimazione, immaginare che tale massa sia concentrata nel suo centro di gravità, ai fini dello studio della sua azione sulle parti mobili della bilancia (da essa relativamente lontane) come la sfera m' che serve di tara, ed il giogo. La distanza tra quel centro di gravità ed il centro di m', risulta di $l = 98$ cm., se computata verticalmente; di $g = 26$ cm, se orizzontalmente (quest'ultima dimensione rappresenta la lunghezza del giogo). Lo sforzo verticale, agente sul coltello di destra, sarà la componente verticale dell'azione di M su m', ed è dato dalla espressione

$$f_1 = -\frac{k\,m\,\mathrm{M}\,l}{(l^2+g^2)^{3/2}};$$

il segno — indica che questa forza è dello stesso segno dell'effetto cercato, e quindi va sottratto dal valore trovato per esso.

Essendo $k = 6{,}68 \cdot 10^{-8}$; $m =$ gr. 1274; $\mathrm{M} =$ gr. 104000, si ha

$$f_1 = -0{,}000832 \text{ dine} = -\text{mg. } 0{,}000848\ .$$

In maniera analoga calcolo le azioni differenziali e verticali dei 6 serbatoi di mercurio posti a m. 2,30 dalla bilancia, quando quel liquido vi si trova, perchè rimosso dal recipiente V; tali azioni si svolgono su entrambe le due sfere di piombo. Per brevità riporto soltanto il loro valore complessivo

$$f_2 = +\text{ mg. } 0{,}000068,$$

che ha segno contrario a quello di f_1.

Il giogo ha una massa di circa 380 grammi. Esso subisce azioni attrattive d segno opposto, sulle sue due braccia; e ciò tanto se il mercurio si trovi nel recipiente V, quanto se si trovi nei serbatoi. Un esame sommario della disposizione, ed un calcolo grafico che non riporto, mi hanno fatto vedere che tale azione tenderebbe a mascherare il fenomeno, facendo apparire m alquanto pesante, quando il mercurio è in V; ma il valore di tale forza è trascurabile, essendo dell'ordine dei milionesimi di milligrammo.

Azione del galleggiante e del suo contrappeso. — Il galleggiante K (fig. 5) è una massa mobile che, insieme col suo contrappeso K', agisce sulla sfera m; la sua azione su m' è perfettamente trascurabile. Esso pesa gr. 300, ed il suo contrappeso 250. Togliendo dai 300 gr. la massa del mercurio spostato, che sarà evidentemente di 50 gr., restano due masse di 250 gr. ciascuna, che alternativamente si abbassano o si innalzano allo spostarsi del mercurio. Ora, per ragioni costruttive, queste masse non si muovono sulla stessa verticale, e quindi non è possibile che i loro effetti attrattivi su m si compensino in ogni istante; si ha perciò da fare sempre con una certa differenza di attrazione. Si rileva però che, in causa della sua

maggiore vicinanza ad m, la maggiore azione è dovuta al galleggiante; e dirò brevemente che il valore di quella differenza è di

$$f_3 = -\text{mg. } 0{,}000174.$$

Ora, quando il mercurio è in V, il contrappeso K è in alto; per cui la sfera m, venendo attirata verso l'alto, apparisce più leggera (donde il segno — già scritto); ma, inoltre, quando il mercurio è stato allontanato, K è in basso, e quindi m apparisce più pesante. Per cui l'azione si raddoppia, ed occorre dire che essa è data da

$$2f_3 = -\text{mg. } 0{,}00035.$$

Così valutate le varie azioni perturbatrici che si sovrappongono con l'effetto ricercato, mi riservo, nella prossima Nota, di computare il valore corretto di questo.

Matematica. — *Sul metodo di Kronecker per la decomposizione di una funzione razionale intera in un campo ampliato di razionalità.* Nota di Vincenzo Amato, presentata dal Socio Luigi Bianchi (1).

Il Kronecker (2) studia la questione di riconoscere se una funzione intera $f(x)$ coi coefficienti appartenenti ad un campo generale di razionalità $(R, R', R'', \ldots)$ possa, o no, esser posta sotto forma di prodotto di funzioni intere irriducibili coi coefficienti appartenenti allo stesso campo e dà, nel primo caso, un metodo per trovare questi fattori. La prima delle quantità $R, R', R'', \ldots$ è supposta funzione algebrica delle rimanenti.

Il dott. Mazzoni, in una Nota recente (3), considerando un polinomio $f(x)$ a coefficienti razionali, e proponendosi la decomposizione di una tale funzione in fattori irriducibili nel corpo algebrico $[\beta_1]$, essendo β_1 radice

(1) Le osservazioni dell'autore sulla validità, in ogni caso, del metodo di Kronecker, sono perfettamente giuste, poichè in questo metodo il parametro λ figura come un'indeterminata *qualunque*, aggiunta al campo di razionalità. Il dott. Mazzoni invece suppone soltanto λ un numero indeterminato razionale nel campo $[1]$ e dimostra che non occorre ampliare il campo $[1]$ coll'aggiunta di una quantità perfettamente variabile, ma basta supporre $f(x)$ irriducicile in $[1]$, ipotesi ben naturale della questione. Sembra dunque che le osservazioni del dott. Mazzoni, *pur non infirmando il metodo di Kronecker*, vi apportino un perfezionamento opportuno. L. Bianchi.

(2) *Grundzüge einer Arithmetischen Theorie der Algebraischen Grössen*, Leopold Kronecker's Werke, Leipzig, B. G. Teubner, Zweiter Band, 1897, § 4.

(3) *Sul problema dell'irriducibilità di un'equazione in un campo di razionalità generale*, Rend. Lincei, vol. XXVIII, n. 3-4, 1919.

di un'equazione irriducibile in [1], ritiene che per la validità del metodo di Kronecker non basta che $f(x)$ sia priva di radici multiple, come suppone il Kronecker, ma bisogna ammettere addirittura che essa sia irriducibile in [1]. Le obbiezioni che solleva il dott. Mazzoni non hanno però alcun fondamento, perchè proveremo che la condizione di irriducibilità di $f(x)$ in [1] è superflua, come l'altra che $f(x)$ sia priva di radici multiple, valendo in ogni caso il metodo di Kronecker senza alcuna modificazione.

Supponiamo infatti che una funzione $f(x)$ intera a coefficienti razionali sia decomponibile nel prodotto di t fattori irriducibili in $[\beta_1]$ e sia

$$f(x) = f_1(x, \beta_1) \cdot f_2(x, \beta_1) \dots f_t(x, \beta_1).$$

Se al posto di x si sostituisce $z + \lambda\beta_1$ e poi si cambia β_1 con le radici coniugate $\beta_2, \dots, \beta_n$ dell'equazione a coefficienti razionali irriducibile in [1], alla quale soddisfa β_1, si ha il seguente quadro:

$$(1) \quad \begin{cases} f(z+\lambda\beta_1) = f_1(z+\lambda\beta_1, \beta_1) \cdot f_2(z+\lambda\beta_1, \beta_1) \dots f_t(z+\lambda\beta_1, \beta_1) \\ f(z+\lambda\beta_2) = f_1(z+\lambda\beta_2, \beta_2) \cdot f_2(z+\lambda\beta_2, \beta_2) \dots f_t(z+\lambda\beta_2, \beta_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(z+\lambda\beta_n) = f_1(z+\lambda\beta_n, \beta_n) \cdot f_2(z+\lambda\beta_n, \beta_n) \dots f_t(z+\lambda\beta_n, \beta_n). \end{cases}$$

Posto

$$(2) \quad F_l(z, \lambda) = f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1) \cdot f_l(z+\lambda\beta_2, \beta_2) \dots f_l(z+\lambda\beta_n, \beta_n) \quad (l = 1, 2, \dots, t),$$

sarà $F(z, \lambda)$ una funzione razionale intera di z e λ in [1], e noi ora dimostriamo che il massimo comun divisore delle due funzioni

$$(3) \quad f(z+\lambda\beta_1) \quad , \quad F_l(z, \lambda)$$

è il fattore $f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1)$ di $f(z+\lambda\beta_1)$. Poichè, come si vede dal quadro (1), le due funzioni (3) hanno il fattore $f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1)$ in comune, basta provare che i due quozienti

$$\frac{f(z+\lambda\beta_1)}{f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1)} \quad , \quad \frac{F_l(z, \lambda)}{f_l(z+\lambda\beta_1, \beta_1)}$$

sono primi fra loro. E infatti essi si scindono in fattori lineari in z e λ, aventi per il primo quoziente la forma

$$z + \lambda\beta_1 - \alpha,$$

e per il secondo la forma

$$z + \lambda\beta_r - \alpha' \qquad (r \neq 1),$$

essendo α ed α' radici di $f(x) = 0$; e, poichè β_r è diverso da β_1, nessuno dei fattori lineari del primo quoziente può essere identico a qualcuno dei fattori lineari del secondo.

Premesso questo, si può risalire al metodo del Kronecker per la decomposizione di $f(x)$ in fattori irriducibili in $[\beta_1]$. Decomposto il prodotto

$$f(z + \lambda\beta_1) \cdot f(z + \lambda\beta_2) \dots f(z + \lambda\beta_n)$$

(che è funzione di z e λ a coefficienti razionali) in fattori irriducibili in $[1]$, e considerato uno di questi fattori, non primo con $f(z + \lambda\beta_1)$, che diciamo $\Theta(z, \lambda)$, cerchiamo il massimo comune divisore delle funzioni

$$f(z + \lambda\beta_1) \ , \ \Theta(z, \lambda).$$

Poichè il fattore $\Theta(z, \lambda)$ è ovviamente un divisore del prodotto (2), per un certo indice l, il detto massimo comune divisore è un fattore $f_l(z + \lambda\beta_1, \beta_1)$ di $f(z + \lambda\beta_1)$, e il cambiamento di z in $x - \lambda\beta_1$ fa ottenere il fattore $f_l(x, \beta_1)$, irriducibile in $[\beta_1]$, di $f(x)$.

Resta così provata la validità, in tutti i casi, del metodo di Kronecker, nel quale λ interviene come parametro, affatto arbitrario; ciò che non sembra abbia convenientemente considerato il dott. Mazzoni formulando le sue obbiezioni.

L'ipotesi che la funzione $f(x)$ non abbia radici multiple, che del resto il Kronecker non pone esplicitamente come necessaria, risulta, come abbiamo visto superflua, sebbene possa essere utile, come anche l'altra, più restrittiva, della irriducibilità in $[1]$ della funzione, per semplificare il procedimento nell'applicazione pratica del metodo.

Matematica. — *Equazioni differenziali di Abel riducibili alle quadrature*. Nota di Pio Scatizzi S. J., presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Questa Nota fa seguito ad un'altra [1] in cui si dimostrava che la equazione Euleriana

$$[1] \qquad \frac{d\Theta}{dx} + \frac{\Phi_1}{\Theta} + \Phi_2 = 0$$

poteva ricavarsi da un'equazione differenziale di Abel del tipo

$$[2] \qquad y' + Ay^3 + By^2 + Cy + D = 0$$

(con A, B, C, D funzioni della sola x) quando su questa si fosse operata la trasformazione

$$[3] \qquad y = u + \frac{1}{\Theta}\varphi,$$

[1] Dott. Pio Scatizzi S. J., *Soluzione di alcune equazioni del tipo di Abel* (questi Rendiconti, vol. XXVI, serie 5ª, 2° sem., fasc. 3°. Roma, agosto 1917).

essendo $\varphi = e^{\int [3Au^2 + 2Bu + C]\, dx}$ ed u un integrale particolare della [2], ed i coefficienti $\Phi_1\, \Phi_2$ dati dalle formole

$$[\alpha] \qquad \Phi_1 = A\varphi^2 \quad , \quad \Phi_2 = [3Au + B]\,\varphi .$$

Facendo particolari ipotesi sopra questi coefficienti della [1], si ottengono altrettanti casi d'integrabilità per quadrature dell'equazione Abeliana [2]. Il sig. V. Z. Elliot, che più di tutti ha esaminato la presente questione sotto tale punto di vista, non sembra abbia raggiunto risultati pratici se non quando si orienta verso l'equazione di Jacobi. Perciò crediamo utile proseguire la ricerca con lo stesso metodo della Nota precedente in cui considerammo il caso $\Phi_2 = 0$. Esaminiamo ora due altri casi, cioè:

$$(I) \qquad \Phi_1 = \Phi \quad , \quad \Phi_2 = -\Phi ;$$

$$(II) \qquad \Phi_1 = -\tfrac{1}{2}\frac{d}{dx}\Phi^2 \, , \quad \Phi_2 = \frac{d}{dx}\Phi ,$$

essendo in ambedue Φ funzione arbitraria.

2. Nella ipotesi (I) l'equazione [1] corrispondente ha per integrale generale

$$[4] \qquad \Theta + \log[\Theta - 1] = -\int \Phi\, dx + H ,$$

essendo H costante arbitraria.

Ora, per la medesima ipotesi (I), viene ad introdursi nelle $[\alpha]$ il legame seguente:

$$[\beta] \qquad 3Au + B = -A\varphi$$

con $\varphi = e^{\int [3Au^2 + 2Bu + C]\, dx}$.

Dalla quale si vede che le quattro quantità A , B , C , u non possono rimanere tutte indipendenti, ma una qualunque di esse dovrà essere espressa in funzione delle rimanenti. A tale scopo poniamo

$$[\gamma] \qquad K = 3Au + B \quad \text{ed} \quad \eta = 3Au^2 + 2Bu + C .$$

Dalla $[\beta]$ allora avremo facilmente la relazione

$$\frac{K'}{K} - \frac{A'}{A} = \eta$$

e, ricavando C, troviamo

$$[5] \qquad C = -u(K + B) - \frac{A'}{A} + \frac{K'}{K} .$$

Volendo fare una prima ipotesi su tale valore di C, possiamo porre $u = 0$, ed otterremo allora

$$C = \frac{d}{dx} \log \left(\frac{B}{A} \right).$$

L'equazione [2], che potrà quindi integrarsi, sarà del tipo

$$[6] \qquad y' + Ay^3 + By^2 + \frac{d}{dx} \log \left(\frac{B}{A} \right) y = 0,$$

con l'I. G.

$$\frac{e^{\int C dx}}{y} + \log \left[\frac{e^{\int C dx}}{y} - 1 \right] = - \int A e^{\int C dx} dx + \text{Cost.}$$

Vale la pena di rilevare anche le due equazioni

$$[7] \qquad y' + ky^3 + By^2 + \frac{B'}{B} y = 0,$$

$$[8] \qquad y' + Ay^3 + ky^2 - \frac{A'}{A} y = 0,$$

che si sono ottenute aggiungendo ancora successivamente le ipotesi

$$A = B = k = \text{Cost.}$$

Altre questioni interessanti possono aversi col medesimo procedimento, facendo cioè varie ipotesi sopra gli elementi componenti la C nella [5]. Così, per mezzo delle tre posizioni

$$K = -B \quad , \quad K = A \quad , \quad K = 0,$$

si sono potute ottenere successivamente le tre equazioni seguenti (in cui, a differenza di quanto accade nella [6], il termine noto non è zero):

$$[9] \qquad y' + Ay^3 + By^2 - \frac{d}{dx} \log \left(\frac{B}{A} \right) y = D,$$

con

$$D = \frac{d}{dx} \left[-\frac{2B}{3A} \right] + \frac{2B}{2A} \left[\frac{B^2(2A - 9)}{9A^2} - \frac{d}{dx} \log \left(\frac{B}{A} \right) \right]$$

$$[10] \qquad y' + Ay^3 + By^2 + \frac{B^2 - A^2}{3A} y = D,$$

essendo

$$D = \frac{d}{dx}\left[\frac{A-B}{3A}\right] + \frac{(A-B)^2}{27A^2}[5B+4A];$$

[11] $$y' + Ay^3 + By^2 + \frac{B^2 - 3A'}{3A}y = D,$$

in cui deve essere

$$D = \frac{d}{dx}\left[-\frac{B}{3A}\right] + \frac{B^2}{27A^2}[9A' - B].$$

3. Passando poi al secondo caso, risolviamo innanzi tutto la [1] in base alle ipotesi (II). L'I. G., che si presenta in termini finiti, è dato dalla seguente espressione:

$$\Phi = \frac{He^{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctang}\left[\frac{1-\frac{2\Theta}{\Phi}}{\sqrt{3}}\right]}}{\sqrt{\left(\frac{\Theta}{\Phi}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}, \quad \text{con } H = \text{Cost.}$$

Considerando ora le posizioni (II), si vede subito che Φ_1 e Φ_2 non sono tra loro indipendenti, rimanendo legati dalla Φ. Eliminando questa, otteniamo la relazione:

$$\Phi = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right).$$

Sostituendo i valori di Φ_1 e Φ_2 secondo le $[\alpha]$ e ricordando le $[\gamma]$, avremo

$$K\varphi = -\frac{d}{dx}\left[\frac{A}{K}\varphi\right].$$

Infine, tenendo conto della $\varphi' = \eta\varphi$, che segue immediatamente dalla seconda delle [3] e delle $[\gamma]$, si ha

$$C = -u(K+B) + \frac{K^2}{A^2} + \frac{d}{dx}\log\left(\frac{K}{A}\right).$$

Analogamente al procedimento antecedente, se facciamo sopra gli elementi di questo valore di C le medesime ipotesi, ossia

$$K = -B \quad , \quad K = A \quad , \quad K = 0 \quad , \quad u = 0,$$

otterremo altre quattro equazioni differenziali, cioè

[12] $$y' + Ay^3 + By^2 + \left[\frac{B^2}{A^2} + \frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right)\right]y = D,$$

con

$$D = \frac{d}{dx}\left[-\frac{2B}{3A}\right] + \frac{2B}{3A}\left[\frac{B^2(A-9)}{9A^2} - \frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right)\right];$$

[13] $$y' + Ay^3 + By^2 + \left[1 - \frac{A^2 - B^2}{3A}\right] y = D,$$

essendo

$$D = \frac{d}{dx}\left[\frac{A-B}{3A}\right] + \frac{(A-B)}{27A^2}\left[(B-A)[2A-B] + 9A\right];$$

[14] $$y' + Ay^3 + By^2 + \frac{B^2 - 3A'}{3A} y = D,$$

dove

$$D = \frac{d}{dx}\left[-\frac{B}{3A}\right] + \frac{B}{27A^2}[9A' - B^2];$$

(15) $$y' + Ay^3 + By^2 + \left[\frac{B^2}{A^2} + \frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right)\right] y = 0.$$

4. Noto che l'algoritmo

$$\Theta - 1 = e^{-\int \Phi dx - e^{-\int \Phi dx - \cdots}}$$

fornisce soluzioni approssimate quanto si vuole per le equazioni del primo caso, purchè sia $0 < \int \Phi\, dx < \infty$, ed $e = 2{,}718281828459\ldots$.

Così per l'equazione

$$y' = Ay^3 + By^2 + \frac{d}{dx}\log\left(\frac{B}{A}\right) y = 0$$

si avrà lo sviluppo

$$y = \cfrac{\frac{B}{A}}{1 + \cfrac{1}{e^{\int \frac{B^2}{A}\, dx} + \cfrac{1}{\int \frac{B^2}{A}\, dx + \cdots}}}$$

e

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive.* Nota II (1) di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

2. Indicheremo con (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), ... gli intervalli contigui all'insieme perfetto P (2). ordinati (per es.) in modo che le loro lunghezze non vadano mai crescendo; indicheremo poi con b'_n un qualsiasi punto di (a_n, b_n), distinto da a_n.

In ogni insieme perfetto P, *di* (a, b) *esiste almeno una porzione, sui cui intervalli contigui il rapporto*

$$\frac{f(b'_n) - f(a_n)}{b'_n - a_n} \tag{1}$$

ammette un limite superiore finito.

Supponiamo che, presi comunque un numero N ed una porzione di P, esistano sempre un intervallo contiguo (a_n, b_n) a tale porzione, e, in esso, un punto b'_n in modo da avere $f(b'_n) - f(a_n) \geq N(b'_n - a_n)$.

Sia n_1 il più piccolo valore di n che soddisfa la disuguaglianza ora scritta per $N = 2$; sia poi $b^{(1)}_{n_1}$ il massimo valore dei b'_n soddisfacenti alla stessa disuguaglianza, per $N = 2$ e $n = n_1$. Indichiamo con δ_1 il massimo intervallo, contenuto in (a, b), di lunghezza non superiore a $b^{(1)}_{n_1} - a_{n_1}$, avente per centro a_{n_1} e sul quale è sempre $f(b^{(1)}_{n_1}) - f(x) \geq b^{(1)}_{n_1} - x$, e con P_1 la porzione di P, di massima lunghezza, contenuta in δ_1. Sostituiamo P_1 a P e, facendo $N = 4$, determiniamo in modo analogo la porzione P_2 di P_1 su cui è sempre $f(b^{(1)}_{n_2}) - f(x) \geq 2(b^{(1)}_{n_2} - x)$. E così proseguiamo indefinitamente. Ciascuno degli insiemi perfetti $P, P_1, P_2, \ldots$ risulta contenuto in tutti quelli che lo precedono; esiste perciò almeno un punto p comune a tutti i P_n. Per essere $f(b^{(1)}_{n_r}) - f(a_{n_r}) \geq 2r(b^{(1)}_{n_r} - a_{n_r})$, l'indice n_r tende all'infinito per $r \longrightarrow \infty$, e si ha $b^{(1)}_{n_r} - a_{n_r} \longrightarrow 0$ e $b^{(1)}_{n_r} - p \longrightarrow 0$. Essendo poi $f(b^{(1)}_{n_r}) - f(p) \geq r(b^{(1)}_{n_r} - p)$, si ha $\Delta(p) = +\infty$, contro l'ipotesi che sia sempre $\Delta(x) < +\infty$.

3. *In ogni insieme perfetto* P, *di* (a, b), *esiste almeno una porzione* P_1 *tale che la serie* $\Sigma' \{f(b_n) - f(a_n)\}$, *limitata ai soli intervalli contigui ad essa, risulti assolutamente convergente.*

Scegliamo in P una porzione sulla quale $\Delta(x)$ ammetta un limite superiore finito (n. 1), che diremo L'; su questa porzione scegliamone un'altra,

(1) Continuazione della Nota I (questi Rend., vol. XXIX, 1° sem., pp. 44-48).

(2) Gli estremi a_n e b_n sono dunque entrambi punti P, al quale insieme non appartiene nessun altro punto di (a_n, b_n).

P_1, sui cui intervalli contigui il rapporto (1) ammetta un limite superiore finito (n. 2), che diremo L''. Dimostriamo che la serie $\Sigma'\{f(b_n) - f(a_n)\}$, limitata ai soli intervalli contigui a P_1, è assolutamente convergente. Detto L un numero maggiore di L' e di L'', formiamo la funzione $F(x) = f(x) - Lx$ e indichiamone con $\overline{A}(x)$ il numero derivato superiore destro. È sempre $\overline{A} = A - L$ e quindi, su tutto P_1, $\overline{A} < 0$. Inoltre, è sempre, sugli intervalli contigui a P,

$$\frac{F(b'_n) - F(a_n)}{b'_n - a_n} = \frac{f(b'_n) - f(a_n)}{b'_n - a_n} - L < 0,$$

$$F(b'_n) - F(a_n) < 0. \tag{2}$$

La serie $\Sigma'\{F(b_n) - F(a_n)\}$, limitata agli intervalli contigui a P_1, è dunque o convergente o divergente, e in questo secondo caso $= -\infty$. Supponiamola divergente, se è possibile. Detta Ω la massima oscillazione della $F(x)$ sull'insieme P_1, scegliamo un intero positivo m in modo che la somma delle differenze $F(b_n) - F(a_n)$, relative ai primi m intervalli contigui a P_1 (l'ordine in cui si considerano questi intervalli è quello stesso in cui essi figurano nella successione di tutti gli intervalli contigui a P), risulti minore di $-\Omega$. Questi primi m intervalli, disposti nell'ordine in cui si presentano su (a, b), siano $(a^{(1)}, b^{(1)}), (a^{(2)}, b^{(2)}), \ldots, (a^{(m)}, b^{(m)})$. Abbiamo

$$\sum_1^m \left\{ F(b^{(r)}) - F(a^{(r)}) \right\} < -\Omega.$$

Affermiamo che è $F(b^{(r)}) > F(a^{(r+1)})$. Essendo $b^{(r)}$ un punto di P_1, è $\overline{A}(b^{(r)}) < 0$, onde, per ogni h positivo, sufficientemente piccolo, $F(b^{(r)}) > F(b^{(r)} + h)$. Indichiamo con $c^{(r)}$ il massimo valore di $b^{(r)} + h$ che non supera $a^{(r+1)}$, soddisfa alla disuguaglianza scritta e corrisponde a un punto di P_1. Se fosse $c^{(r)} < a^{(r+1)}$, $c^{(r)}$ non potrebbe coincidere col primo estremo di un intervallo contiguo a P_1, perchè, per la (2), esso non sarebbe il massimo dei valori indicati; e non potrebbe neppure essere un altro punto di P_1 perchè, avendosi $\overline{A}(c^{(r)}) < 0$, esso non darebbe ancora il massimo dei valori detti. È dunque $c^{(r)} = a^{(r+1)}$, da cui $F(b^{(r)}) \geq F(a^{(r+1)})$. Da ciò si trae

$$F(b^{(m)}) - F(a^{(1)}) = \sum_1^m \{F(b^{(r)}) - F(a^{(r)})\} + \\ + \sum_1^{m-1} \{F(a_{r+1}) - F(b_r)\} \leq \sum_1^m \{F(b^{(r)}) - F(a^{(r)})\} < -\Omega,$$

il che contraddice al fatto che Ω è la massima oscillazione della F sull'insieme P_1. La serie $\Sigma'\{F(b_n) - F(a_n)\}$, estesa agli intervalli contigui a P_1, è dunque convergente e convergente assolutamente, e tale è necessariamente anche $\Sigma'\{f(b_n) - f(a_n)\} = \Sigma'\{F(b_n) - F(a_n)\} + L\Sigma'(b_n - a_n)$.

4. *Sulla porzione* P_1, *considerata al numero precedente,* $A(x)$ *è integrabile nel senso del Lebesgue e vale l'uguaglianza*

$$(3) \qquad f(p^{(1)}) - f(p^{(0)}) = \int_{P_1} A(x)\,dx + \Sigma' \{ f(b_n) - f(a_n) \},$$

dove la serie è estesa soltanto agli intervalli contigui a P_1, *e* $p^{(0)}$ *e* $p^{(1)}$ *indicano il primo e il secondo estremo di* P_1.

Siccome è

$$L(p^{(1)} - p^{(0)}) = L \int_{P_1} dx + L\,\Sigma'(b_n - a_n),$$

basterà dlmostrare che, su P_1, è integrabile $\overline{A}(x)$ e che la formula (3) vale per la $F(x)$.

Rammentiamo che è, in ogni punto di P_1, $\overline{A} < 0$ e che vale, sugli intervalli contigui a P_1, la (2).

Preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, indichiamo con e_r $(r = 1, 2, \ldots)$ l'insieme dei punti di P_1 in cui è $-r\varepsilon \leq \overline{A} < -(r-1)\varepsilon$, e con $m(e_r)$ la sua misura. Scelto poi un intero positivo N, sufficientemente grande perchè la somma dei primi N termini della serie Σ' — somma che indicheremo con Σ'' — risulti minore della serie stessa aumentata di ε, indichiamo con e_0 l'insieme somma di tutti gli e_r di indice $r > N$ e dell'insieme dei punti di P_1 in cui è $\overline{A} = -\infty$. Rinchiudiamo i punti di e_r $(r = 0, 1, 2, \ldots, N)$ in un sistema numerabile Δ_r di intervalli, senza parti comuni, di $(p^{(0)}, p^{(1)})$, in modo che ogni punto dell'insieme sia *interno* all'intervallo che lo contiene e che la misura complessiva $m(\Delta_r)$ di tutti gli intervalli di Δ_r soddisfi alla doppia disuguaglianza

$$(4) \qquad 0 \leq m(\Delta_r) - m(e_r) < \frac{\varepsilon}{N^3}.$$

Attribuiamo ora ad ogni punto di $(p^{(0)}, p^{(1)})$ un intervallo appartenente a questo segmento e avente il primo estremo nel punto considerato, con la seguente regola. Al primo estremo di un intervallo contiguo a P_1 attribuiamo lo stesso intervallo contiguo che lo contiene; ad un punto p di e_r $(r = 0, 1, 2, \ldots N)$, non di quelli già considerati, attribuiamo il massimo intervallo appartenente a quello del sistema Δ_r che contiene p e tale che in esso non sia contenuta nessuna parte dei primi N intervalli contigui a P_1, e che il suo secondo estremo p' appartenga all'insieme P_1 e soddisfi alla prima o alla seconda delle due disuguaglianze

$$(5) \qquad \frac{F(p') - F(p)}{p' - p} \leq -(r-1)\varepsilon \quad , \quad \frac{F(p') - F(p)}{p' - p} \leq -N\varepsilon \,,$$

secondo che è $r > 0$ oppure $r = 0$ (¹). Gli intervalli così definiti hanno tutti ambedue gli estremi su P_1 e con essi, partendo da $p^{(0)}$, possiamo ricoprire $(p^{(0)}, p^{(1)})$ con una catena di intervalli, in modo che ciascun intervallo della catena abbia come primo estremo il secondo estremo del precedente oppure il limite superiore dei secondi estremi dei precedenti (²). Se (p, p') è un intervallo qualsiasi della catena, per la (2) e per le due disuguaglianze precedenti, abbiamo $F(p') - F(p) \leq 0$, e la serie

$$S = \Sigma \{ F(p') - F(p) \},$$

estesa a tutti gli intervalli della catena, risulta assolutamente convergente e avente per somma $F(p^{(1)}) - F(p^{(0)})$. Fra gli intervalli della catena figurano poi sicuramente i primi N intervalli contigui a P_1, così che fra i termini della serie S figurano tutti quelli di $\Sigma'' \{ F(b_n) - F(a_n) \}$.

Indichiamo con Δ'_r l'insieme degli intervalli della catena che hanno come primo estremo un punto di e_r $(r = 0, 1, \ldots, N)$ non primo estremo di un intervallo contiguo a P_1, e con $m(\Delta'_r)$ la misura complessiva di tali intervalli. I punti di e_r non contenuti negli intervalli di Δ'_r e che non siano primi estremi di intervalli contigui a P_1, sono contenuti negli intervalli dei sistemi $\Delta'_{r'}$, con $r' \neq r$ e quindi in quelli dei $\Delta_{r'}$ corrispondenti. Per la (4), la misura del loro insieme è pertanto minore di $\frac{\varepsilon}{N^3} \cdot N = \frac{\varepsilon}{N^2}$, ed è così $m(\Delta'_r) > m(e_r) - \frac{\varepsilon}{N^2}$, da cui si trae, per $0 < r \leq N$,

$$-(r-1)\varepsilon\, m(e_r) + \frac{\varepsilon^2}{N} \geq -(r-1)\varepsilon\, m(\Delta'_r),$$

$$-\varepsilon \sum_1^N (r-1)\, m(e_r) + \varepsilon^2 \geq -\varepsilon \sum_1^N (r-1)\, m(\Delta'_r)$$

e, per la prima delle (5),

$$-\varepsilon \sum_1^N (r-1)\, m(e_r) + \varepsilon^2 \geq \Sigma_1 \{ F(p') - F(p) \},$$

dove la serie Σ_1 è estesa a tutti gli intervalli della catena che hanno per primo estremo un punto di e_r $(r = 1, 2, \ldots N)$ e che non coincidono con un intervallo contiguo a P_1. Da questa disuguaglianza e da un'osservazione fatta più sopra, scende

$$(6) \quad -\varepsilon \sum_1^N (r-1)\, m(e_r) + \Sigma'' \{ F(b_n) - F(a_n) \} + \varepsilon^2 > S = F(p^{(1)}) - F(p^{(0)}),$$

(¹) Si rammenti che è $\overline{\Delta}(p) < -(r-1)\varepsilon$ se $r > 0$, e $\overline{\Delta}(p) < -N\varepsilon$ se $r = 0$.

(²) Cfr. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904, pag. 63).

ed anche $-\varepsilon\sum_1^N (r-1)\,m(e_r) > \mathrm{F}(p^{(1)}) - \mathrm{F}(p^{(0)}) - \varepsilon^2$. Questa disuguaglianza, essendo verificata per tutti gli N sufficientemente grandi, mostra che è $-\varepsilon\sum_1^\infty (r-1)\,m(e_r) \geq \mathrm{F}(p^{(1)}) - \mathrm{F}(p^{(0)}) - \varepsilon^2$ e quindi che $\overline{A}(x)$, che su P_1 è sempre <0, è su tale insieme integrabile. Avendosi poi $\int_{\mathrm{P}_1} \overline{A}\,dx > -\varepsilon\sum_1^\infty (r-1)\,m(e_r) - \varepsilon\,m(\mathrm{P}_1)$, e passando in (6) al limite per $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$, si ottiene

$$\int_{\mathrm{P}_1} \overline{A}\,dx + \Sigma' \{\mathrm{F}(b_n) - \mathrm{F}(a_n)\} + \varepsilon^2 + \varepsilon\,m(\mathrm{P}_1) \geq \mathrm{F}(p^{(1)}) - \mathrm{F}(p^{(0)}),$$

e, poichè ε è arbitrario,

$$\int_{\mathrm{P}_1} \overline{A}\,dx + \Sigma' \{\mathrm{F}(b_n) - \mathrm{F}(a_n)\} \geq \mathrm{F}(p^{(1)}) - \mathrm{F}(p^{(0)}).$$

Questa disuguaglianza vale evidentemente anche su ogni porzione di P_1, per modo che, se x indica un punto di P_1, non secondo estremo di un intervallo contiguo all'insieme, e poniamo $\varphi \equiv \overline{A}$ su P_1 e $\varphi \equiv 0$ altrove, abbiamo

$$\int_{p^{(0)}}^{x} \varphi\,dx - \Sigma'_x \{\mathrm{F}(b_n) - \mathrm{F}(a_n)\} \geq \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(p^{(0)}), \tag{8}$$

dove la serie Σ'_x è estesa agli intervalli contigui alla porzione di P_1 compresa fra $p^{(0)}$ e x. Se poi x indica un punto appartenente ad un intervallo (a_m, b_m) contiguo a P_1, ponendo $\Sigma'_x = \Sigma'_{a_m} + \{\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a_m)\}$, e applicando la precedente disuguaglianza a $x = a_m$, abbiamo che la stessa disuguaglianza è valida per ogni x di $(p^{(0)}, p^{(1)})$.

Chimica. — *Le leghe di oro e silico* (1). Nota di CLARA DI CAPUA, presentata dal Socio E. PATERNÒ (2).

Sulle leghe di oro e silicio si hanno poche notizie nella letteratura.

Winkler (3), che ne preparò alcune, dice che, con 3 % Si, l'oro diventa giallo sporco; con 10 % grigio gialliccio, fragile, a frattura concoide; con 20 % e più, sempre più fragile e grigio.

Warren (4) ha preparato leghe di oro e silicio facendo agire Au sopra K_2SiFl_6, a temperatura elevata, e anch'egli afferma che la lega al 5 % Si, così ottenuta, è fragile quasi come l'antimonio.

Più recentemente Vigouroux (5), scaldando Si e Au intimamente mescolati e fortemente compressi, ha ottenuto globuli di lega dura e fragile in cui, con mezzi chimici, ha stabilito la presenza del silicio e l'assenza di siliciuro.

Queste notizie ci dicono solo che Si si allega ad Au, alterandone le proprietà in misura tanto più forte, quanto maggiore è la sua concentrazione.

Ho creduto perciò opportuno di studiare il diagramma di stato del sistema Au-Si per chiarire la natura delle leghe che si formano.

Mi son servito di Au a $^{999}/_{1000}$ e di Si della casa Griffin di Londra. Questo conteneva dal 4 al 5 % di impurezze, costituite, nella quasi totalità, di ferro. Ho preparato le leghe fondendole in crogiuoli di porcellana dura di Berlino a mezzo del solito forno tubolare Tammann a resistenza di carbone.

Di solito le operazioni del genere di quelle da me eseguite vengono fatte su un peso costante di miscugli di composizione varia per poter trarre, dal confronto delle durate di arresto, utili indicazioni sulle caratteristiche principali del diagramma. Nel caso in quistione però, data la notevole differenza del peso specifico dei due elementi Au e Si sarebbe stato necessario adoperare quantità dei diversi miscugli che occupassero uno stesso volume.

Il comportamento delle leghe al raffreddamento ha però provato che non era da sperare di poter trarre un gran vantaggio dalle durate degli arresti, presentandosi questi in maniera assai irregolare a causa della bassa conducibilità termica del silicio; onde è che le esperienze sono state ese-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica inorganica e di chimica-fisica del R. Istituto di Studi Superiori in Firenze.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 settembre 1919.

(3) J. Prakt. Ch., *21*, 203 (1864).

(4) Chem. News, *60*, 5 (1889); *67*, 303 (1893).

(5) Ann. Chim. Phys., [7], *12*, (1897), pag. 170.

guite con quantità variabili da 12 a 20 gr. dei diversi miscugli, e si è trascurato di tenere conto delle durate degli arresti.

Come si vedrà, dato l'aspetto che ha il nostro diagramma, l'aver trascurato le durate degli arresti nulla toglie alla esattezza di esso.

Le esperienze sono state fatte in ambiente d'idrogeno: questo protegge dalla ossidazione anche i miscugli più ricchi di silicio, purchè sia fatto passare in corrente molto rapida.

Il rivestimento di porcellana della pinza termo-elettrica resiste abbastanza all'azione della massa fusa, purchè si abbia l'avvertenza di immergere la pinza nella massa fusa solo quando, cessato il riscaldamento, si inizia il raffreddamento della lega.

I miscugli Au-Si sono stati portati tutti a temperatura superiore a quelle di fusione del silicio, e quindi bene agitati con una bacchetta di porcellana dura, per assicurare omogeneità di composizione al miscuglio fuso.

La pinza è stata tarata determinando i punti di fusione di Pb, Zn, Ag, Cu, Ni. La correzione da apportare alle temperature lette sul galvanometro variava da 30° per 300°, a 75° per 1400°.

Nella tabella che segue sono riportati i resultati delle esperienze:

Numero delle esperienze	Composizione in percentuali in peso		Temp. di inizio di solidificazione	Temp. di fine di solidificazione
	Au	Si		
1	100	—	1064°	370°
2	98,5	1,5	940	370
3	96,5	3,5	840	370
4	95	5,0	580	370
5	90	10	790	370
6	85	15	1030	370
7	80	20	1130	370
8	75	25	1175	370
9	67	33	1265	370
10	60	40	1295	370
11	50	50	1350	370
12	33	67	1375	370
13	15	85	1390	—
14	0	100	1404	—

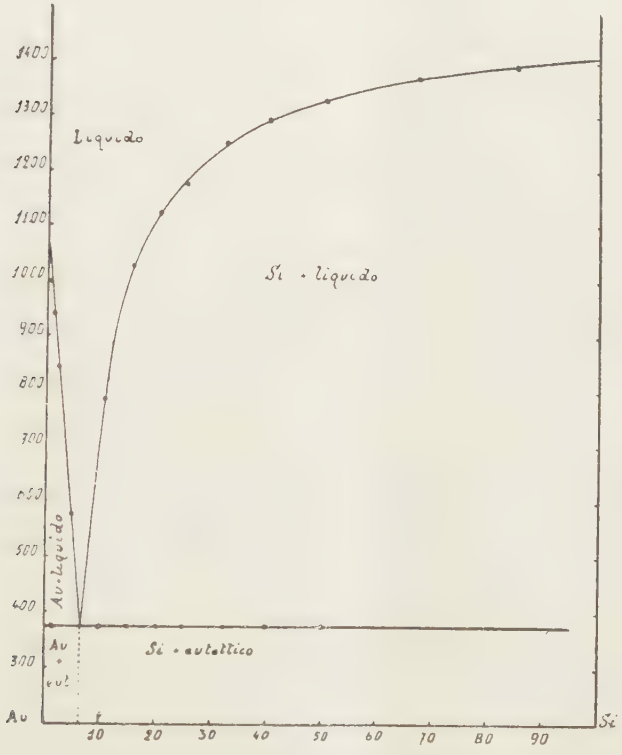
Con questi valori è possibile descrivere il diagramma di fusione riprodotto nella figura.

Come si rileva da questa, oro e silicio si mescolano allo stato liquido in tutti i rapporti, non formano composti fra loro, e sono completamente

non miscibili allo stato solido, almeno nei limiti di errore delle esperienze.

Nella lega all'85 % di Si non è stato possibile di rintracciare con sicurezza un rallentamento corrispondente alla solidificazione dell'eutettico, mentre invece col microscopio si son potuti distinguere qua e là, nella massa, dei cristallini di oro.

La formazione di cristalli misti a questa concentrazione è perciò da escludersi. Il non aver osservato rallentamento sulla curva di raffreddamento,



in corrispondenza all'eutettico, non deve pertanto maravigliare quando si tenga presente la bassa conducibilità calorifica del silicio e il fenomeno di cui passo a parlare.

E cioè, quasi tutte le leghe ricche in silicio da me studiate presentavano un globulo dorato alla superficie, il quale si distaccava nettamente dal blocco metallico grigio-bleu. Un globulo dello stesso genere è stato pure osservato nelle leghe di silicio e argento (1) e di silicio e alluminio (2), ed è certamente dovuto al fatto che il silicio solidifica con aumento di volume.

(1) Arrivaut, Zeit. anorg. Ch., *60*, 440 (1908).
(2) Frankel, ibidem, *58*, 154 (1908).

Perciò, nella solidificazione delle leghe, la parte che solidifica in ultimo, l'eutettico, viene spinta in alto e forma sul blocchetto metallico il globulo dorato. Alcuni di questi blocchetti sono stati analizzati e, pur non avendo la composizione dell'eutettico, hanno dimostrato di essere molto più concentrati in oro che la lega da cui si sono formati. Così la lega all' 80 % Au ha dato un blocco con 83 % Au. Per l'eutettico del diagramma si ricava una composizione del 94 % Au.

Il diagramma Au-Si presenta un notevole interesse per il forte abbassamento che subisce il punto di fusione dell'oro. Basta infatti il 6-7 % di Si per abbassarlo di 800° circa.

Un comportamento simile si ha nel caso del platino, il cui punto di fusione (1705°) viene abbassato a 578°, cioè circa 1200°, per l'aggiunta del 12 % circa di As (1).

L'esame microscopico delle leghe conferma pienamente i risultati della analisi termica.

Microbiologia. — *Sul comportamento del « Bacterium coli » nel latte* (2). Nota del prof. Costantino Gorini, pres. dal Socio G. Koerner.

Il biochimismo del *bacterium Coli* è fra i più discussi, come lo attestano la ricca letteratura e le numerose sottospecie e varietà a cui ha dato luogo. Proprietà che per alcuni autori sono fondamentali, per altri sono accessorie; al tipo che, sembrando il più diffuso, risponde al prisco nome di *bacillus Coli communis*, se ne è aggiunto un altro, per la sua maggior frequenza denominato *bacillus Coli communior*; specie che prima erano classificate separatamente, come il *b. lactis aërogenes*, il *b. acidi lactici Hüppe*, il *b. cloacae*, il *proteus*, vengono talora conglobate in un medesimo gruppo detto del Colon o della « microflora intestinale » (Rogers) (3). E le controversie fra gli investigatori s'impegnano tuttavia, talchè la definizione del genere incontra molteplici modificazioni.

Taluni dispareri sono stati già appianati mercè perfezionamenti nei metodi di indagine. Così accadde nei riguardi della produzione dell'indolo, la cui determinazione ha subìto progressivi miglioramenti, sia impiegando, giusta il mio consiglio (4), particolari qualità di peptone nell'allestimento dei

(1) Friedrich e Léroux, Metallurgie, *5*, pag. 148 (1908).

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Batteriologia della R. Scuola Superiore di Agricoltura di Milano.

(3) Journ. of Infect. Diseas, 1914, 14°, 3. pp. 411-475.

(4) Giorn. R. Soc. It. Igiene, 1893, 15°, n. 5; Centralbl. f. Bakter. 1893, 13°, pag. 79.

terreni di cultura, sia usando, a seconda dei tipi, culture in brodo Liebig o in acqua peptotizzata con o senza triptofane, sia mettendo in evidenza la reazione per duplice via, cioè col processo Salkowsky all'acido solforico e col processo Ehrlich alla paradimetilamidobenzaldeide.

Uno dei punti di maggior contestazione riflette il comportamento del *b. Coli* nel latte. Mentre in origine una delle caratteristiche essenziali per cui il *Coli* si differenziava da altri generi similari e segnatamente dal bacillo del tifo era, conformemente allo scopritore Escherich, la proprietà di coagulare il latte; in seguito essa è andata perdendo tanto del proprio significato da essere da taluni messa fra le accessorie e da talaltri perfino trascurata del tutto fra i criterî diagnostici del gruppo (Neri) (1). Ciò deriva dalle incertezze in cui si dibattono gli autori a proposito dei singoli tipi di *Coli* che ora coagulano ed ora non coagulano il latte. Curiosa è la diversa casistica recata dagli autori; Konrich (2), che ha fatto uno degli studî più esaurienti sopra 2387 stipiti, riduce al 24,14 % la proporzione degli stipiti di *Coli* che non coagulano il latte; nè manca chi continua ad assegnare al potere coagulante un valore, se non assoluto, certamente probativo per caratterizzare i *Coli* di una determinata origine; ma pur qui il divario non potrebbe essere più stridente, imperocchè, ad es., i *Coli* fecali sono per alcuni i più costanti a coagulare (Crossonini) (3), e invece per altri sono i meno costanti (Konrich).

A chiarire e dissipare le discrepanze, si possono invocare e la temperatura di incubazione che varia dai 37° ai 46° C., e la durata dell'osservazione che va dai 5 ai 15 giorni, e fors'anco la quantità della semente; ma soprattutto ho pensato possa giovare un accorgimento di tecnica nell'allestimento delle lattoculture, che già era scaturito dai miei studî sui fermenti lattici (4). Insegnai allora come il comportamento dei fermenti lattici nelle lattoculture fosse diverso, a norma che il latte era stato sterilizzato blandamente in guisa da conservargli il proprio colorito bianco, oppure profondamente in guisa da fargli assumere una tinta bruniccia che si accompagna ad una modificazione chimica per cui ne viene pregiudicata l'attitudine alla coagulazione mediante presame, pur mantenendo la coagulabilità mediante acidificazione. Ne viene che i fermenti lattici fortemente acidificanti sono capaci di coagulare tanto il latte bianco quanto il bruniccio; invece i fermenti lattici deboli acidificatori coagulano solamente il latte bianco perchè, per rapprendere il latte, abbisognano dell'aiuto dell'enzima presamico da essi elaborato, il quale non agisce sul latte imbrunito. Orbene, analogo atteg-

(1) L'Igiene Moderna, 1915, 8°, nn. 2, 3, e 4.
(2) Klin. Jahrb., 1910, 13°, pp. 1-124.
(3) L'Igiene Moderna, 1918, 11°, n. 8.
(4) Rend. R. Accad, Lincei, 1917, 26°, pag. 195.

giamento io ho osservato fra i colibacilli che da lunga pezza vado isolando nelle mie ricerche sulla microflora del latte, delle fèci e dei foraggi; cosicchè ho dovuto modificare il mio giudizio di anni addietro (1894) (1) in cui avevo classificato il *Coli* fra i batterii non presamigeni. Per tal via sono giunto a ravvisare due tipi di *Coli* che si differenziano nettamente per il potenziale d'acidificazione: il tipo che coagula solamente il latte bianco, ma non l'imbrunito, arriva appena a produrre una acidità lattica attorno al $^1/_2$ per cento; l'altro tipo, che coagula anche il latte imbrunito (sebbene con sensibile ritardo sul latte bianco) produce un'acidità lattica dall' $1\,^1/_2$ al 2 per cento. Vogliasi notare che le lattoculture sono tenute per 15-45 giorni alla temperatura di 38-40° C., che, a mio avviso, è la più oppurtuna, verisimilmente perchè agevola l'azione del presame; avvertasi inoltre che la titolazione dell'acidità va eseguita tempestivamente, perchè in seguito certi stipiti di *Coli* presentano il fenomeno della reversione dovuto alla produzione di sostanze a reazione alcalina, fenomeno che è per l'appunto frequente nei *Coli* più acidogeni giacchè, essendo essi anche i più acidoresistenti, le loro attività possono continuare anche dopo la cessazione della fermentazione del lattosio.

I miei accertamenti mi autorizzano a sollevare il sospetto che la mancata coagulazione del latte, osservata dagli autori presso molte razze di colibacillo, sia da attribuire al fatto di avere esperimentato con latte troppo profondamente sterilizzato; questo sospetto è tanto più giustificato in quanto pochi sono gli sperimentatori che indicano il processo di sterilizzazione adottato, e molti sono i trattati di batteriologia che prescrivono di sterilizzare il latte a temperature tali da alterarne notevolmente il colorito. Fatto sta che io non ho ancora incontrato un ceppo di colibacillo che non abbia coagulato il latte sterilizzato bianco; non solo, ma soggiungerò che, avendo sottoposto a controllo parecchi stipiti di *Coli* e di *Colisimili* provenienti da laboratorî italiani e stranieri, li trovai dotati di potere coagulante, contrariamente all'affermazione dei colleghi che me li avevano favoriti. Osservai, è vero, talora, un notevole ritardo nella coagulazione, massime quando la temperatura di incubazione era rimasta al disotto dei 38-40° C.; ma in tal caso bastava sottoporre le lattoculture, dopo 8-10 giorni, ad un tenue riscaldamento perchè si rapprendessero, dappoichè in tal guisa veniva agevolata l'azione dell'enzimo presamico. (Rammento, a questo proposito, lo stratagemma di alcuni autori di indagare la coagulabilità delle culture di 24-48 ore, portandole a 100° C.). Ne concludo che la proprietà di coagulare il latte sterilizzato bianco può ben figurare fra i criterî diagnostici del *Coli*.

(1) Giorn. R. Soc. It. Igiene, 1894, 16°, n 4.

***

Un'altra constatazione, alla quale ànno condotto queste mie ricerche, si è che i due tipi suaccennati di *Coli* non sono ugualmente e indifferentemente distribuiti nei vari ambienti: latte, fèci e foraggi. Mentre ho riscontrato che nel latte siffatta distribuzione è mutevole, nel senso che talora prevale un tipo, talora prevale l'altro, e talora i due tipi si equilibrano; per converso nelle fèci, tanto bovine quanto umane, ho trovato una costante maggiore abbondanza del tipo di *Coli* a debole potenziale acidificatore, e nei foraggi invece una costante maggiore abbondanza del tipo di *Coli* a forte potenziale acidificatore. Questa constatazione suggerisce diverse considerazioni di ordine scientifico-pratico.

In primo luogo vien fatto di domandare una spiegazione del diverso *habitat* dei due tipi di *Coli*. La loro variabile proporzione nel latte può essere facilmente messa in rapporto colla variabilità della duplice fonte di inquinazione microbica a cui il latte va soggetto: la contaminazione fecale e la contaminazione foraggera. Ma il contrasto fra il costante predominio numerico del tipo vigoroso nei foraggi e del tipo debole nelle feci bovine non trova un'apparente ragione se non supponendo un processo di attenuazione fermentativa acidogena del *Coli* attraverso l'intestino; siffatta ipotesi attende naturalmente la ratifica sperimentale. Peraltro, anche i *Coli* delle fèci umane stanno ad attestare che l'intestino non è l'ambiente più favorevole alla loro attività acidogena.

In secondo luogo mette conto di porre in guardia che, nella ricerca del *b. Coli* nelle acque come indice di contaminazione organica, può tornare bensì utile d'interrogare il potere coagulante del germe sul latte, purchè però si abbia cura di usare latte non profondamente sterilizzato; se si usa latte rossigno, si corre pericolo di trascurare la presenza di *Coli* di provenienza animale e di dar peso invece a *Coli* di provenienza vegetale, il cui significato inficiante è assai minore.

***

Concludendo, queste mie ricerche dimostrano:

1°) Che il *bacillus Coli* presenta un diverso comportamento nelle lattoculture, a seconda del suo potenziale acidogeno; per cui si possono stabilire due tipi di *Coli*: uno acidificante vigoroso che coagula anche quando il latte ha subìto, per effetto della sterilizzazione, modificazioni tali da acquistare una tinta bruniccia; un altro tipo acidificante debole che arriva bensì, col concorso del suo enzima presamico, a coagulare, purchè però il latte sia convenientemente risparmiato nel processo di sterizzazione, così da conservare il proprio colorito bianco. L'ideale sarebbe di disporre di latte

munto aseticamente in guisa da non richiedere processi profondi di sterilizzazione.

2°) Che la distribuzione dei due tipi di *Coli* nei varî ambienti si manifesta con una maggior frequenza del tipo vigoroso nei foraggi e del tipo debole nelle fèci bovine ed umane: nel latte la proporzione è mutevole in conseguenza della duplice via di contaminazione fecale e foraggera.

3°) Che dall'insieme delle osservazioni fatte viene ad essere rafforzato il valore diagnostico del potere coagulante del *Coli* e si rendono suscettibili di appianamento molti dispareri sull'argomento, massime nei riguardi del giudizio igienico sulle acque.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Cirinei E. *Principio delle velocità virtuali.* Presentata dal Segretario.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

I Soci Levi-Civita, relatore, Almansi e Crocco, presentano una relazione sulla Memoria del prof. A. Signorini: *Sull'integrazione approssimata delle equazioni classiche della balistica esterna*, relazione che conclude col proporre la inserzione del lavoro negli Atti accademici.

La proposta della Commissione esaminatrice, messa ai voti dal Presidente, è approvata dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Borzì legge la seguente commemorazione del compianto Socio Giovanni Briosi:

Con animo devoto volgo oggi il mio pensiero a Giovanni Briosi; ed in nome vostro, illustri colleghi, e in nome della scienza, a Lui così cara, concedetemi che io porga il mio saluto riverente alla Sua memoria e vi parli della Sua opera.

Nacque Giovanni Briosi a Ferrara il 29 aprile del 1846 da Domenico Briosi e Ginevra Salveggiani appartenenti a famiglia di modesti operai. E questo va ricordato anzitutto a grande onore e vanto di Lui, poichè l'alta posizione scientifica raggiunta rappresenta il frutto di una possente volontà e di talento non comune.

Infatti Giovanni Briosi era destinato a seguire le orme del padre e relativamente tardi potè dedicarsi agli studî, solo quando per la gracilità e la malferma salute la famiglia riconobbe necessario di sottrarlo al grave lavoro dell'officina. E così, sotto l'impulso delle ammirevoli attitudini dello spirito e per la tenace volontà, divenne un bravo operaio della scienza. Coloro che Lo conobbero giovinetto rammentano con meraviglia com'Egli, dotato appena di quelle rudimentali cognizioni che sogliono essere impartite nei comuni asili d'infanzia, dopo solo undici mesi di studio, avvivato dall'intenso amore ad apprendere, sia riuscito a superare con lode gli esami della licenza liceale.

Tutto il resto della Sua vita di studente è una gara d'incessante attività, uno sforzo meraviglioso di energia per arrivare presto e bene là dove altri, nelle medesime condizioni, non avrebbero potuto o saputo giungere tanto rapidamente e meglio. E così, mentre segue i corsi del liceo, lo vediamo iscritto come semplice uditore a quelli di matematica nella patria università, in modo che, appena conseguita la licenza e ottenuta la regolare convalidazione dei detti corsi, egli poteva recarsi a Torino per compiere gli studî d'ingegneria in quel politecnico e poscia a Napoli alla Scuola d'applicazione degli Ingegneri, ottenendo a tal fine, ed in considerazione dei suoi meriti, una borsa di studio da parte dell'Ateneo ferrarese.

Laureatosi ingegnere in Napoli, il Briosi, anzichè scegliere la via professionale, segue quella degli studî scientifici; e particolarmente le sue più spiccate tendenze sembrano dirette agli studî dell'agronomia che gli aprivano il cammino verso quella mèta in cui noi lo abbiamo seguìto con ammirazione per oltre quarant'anni sino al momento nel quale la morte troncava la Sua nobile esistenza. A prova delle felici disposizioni del talento, e, più che mai, del precoce svolgimento delle qualità scientifiche, dobbiamo ricordare alcuni scritti di questo primo periodo della vita di studioso, i quali mostrano nell'Autore, allora poco più che ventenne, uno spirito indagatore versatile e, quasi diremmo, singolarmente maturo. Tale è appunto lo scritto *Sulle inondazioni, il disboscamento e le loro cause*, pubblicato nel « Giornale d'agricoltura del regno d'Italia » (Bologna, 1868), e quello *Sul calcolo delle macchine a vapore* (Napoli, 1869); quest'ultimo sembra che rappresenti la tesi di laurea in ingegneria. Della stessa epoca è il lavoro in collaborazione col prof. Albini, *Sui risultati di ricerche chimiche qualitative e quantitative sul frutto di fico* (Napoli, 1869).

Questa eccellente precoce attività scientifica veniva meritamente apprezzata dal governo, il quale conferiva al Briosi una borsa di studio per recarsi all'estero e approfondire vieppiù la Sua cultura agraria scientifica. Egli si recò subito a Bruxelles e poscia in Germania, frequentando prima il laboratorio di anatomia vegetale diretto dal De Bary, a Strassburgo, e in ultimo quello di fisiologia e anatomia vegetale di Halle diretto dal prof. Gregorio Kraus. Quivi il Briosi segnava la prima volta il Suo nome nell'aureo albo

della scienza di flora pubblicando due notevoli Memorie sull'autorevole periodico botanico — la *Botanische Zeitung* — diretto a quel tempo dallo stesso Kraus.

Esse meritano la nostra attenzione. Nella prima, dal titolo, che traduciamo dal tedesco: *Sulla presenza generale dell'amido nei tubi cribrosi* (« Bot. Zeit. », 1873, nn. 20-21-22), l'A. segnalava, in 129 specie di piante fra le 146 esaminate appartenenti ai più disparati gruppi del regno vegetale, all'interno dei vasi cribrosi, la presenza di granelli di amido estremamente piccoli così da rendersi appena visibili con i più forti obbiettivi. Questi corpi tendono ad accumularsi intorno alle placche cribrose e possono anche attraversare i sottili canalicoli di queste, così come vien dimostrato esperimentando con pressioni che l'Autore esercitava sui preparati. E sia per questo, sia in considerazione del movimento dei granuli amilacei dentro la cavità dei tubi cribrosi, il Briosi traeva argomento per dedurre che i prodotti di riserva delle piante, l'amido in particolare, possono direttamente essere trasportati dalla corrente circolatoria dei succhi elaborati per trasferirsi ai centri di consumo senza subire alcuna trasformazione chimica.

Nell'altra Memoria il Briosi tende a dimostrare che il lavoro della clorofilla in alcune piante, quali p. es. le Musacee, può avere per oggetto la formazione di materia grassa anzichè amido, come è il caso generale.

Con questi lavori il Briosi si rendeva per la prima volta noto al pubblico botanico; specialmente in Italia essi furono molto ben apprezzati come una rivelazione di metodi di ricerca costituenti allora un indirizzo quasi nuovo per noi. Così, Egli preparava le basi della Sua carriera scientifica colla reputazione di eccellente osservatore dotato della conoscenza dei più perfetti metodi della indagine e della tecnica del microscopio. Si aggiunga, a questo, il pregio di cognizioni di fisiologia e chimica agronomica o almeno di tendenze a studî di tal natura, rese appena manifeste ed espresse nei primi passi della Sua vita scientifica: tendenze per le quali Egli aveva guadagnato la borsa di studio all'estero e che avrebbero dovuto formare il carattere della Sua coltura.

Sono certo di non ingannarmi affermando che su queste tracce il Briosi costruì e diè forme al Suo avvenire scientifico. Esse ci additano nel campo della botanica pura in Lui uno studioso di argomenti di anatomia e morfologia e di micologia, ordinariamente questa come ausilio della patologia vegetale, mentre occupano una parte molto rilevante le ricerche e le analisi chimiche aventi rapporti con questioni d'interesse agronomico.

Seguendo il Briosi nella Sua carriera e nei successi della Sua vita e del lavoro scientifico, notiamo anzitutto che Egli al ritorno dall'estero veniva dal Ministero d'agricoltura incaricato della direzione della istituenda Stazione chimico-agraria sperimentale di Palermo, ufficio molto importante che Egli seppe, per quanto con mezzi molto limitati, adempiere con zelo e con quella

illuminata conoscenza dei bisogni della regione ove sorgeva l'Istituto affidato alle Sue cure. In Palermo Egli trovò ausilio di cooperazione nell'ambiente ospitale isolano, così da poter dare ivi un forte impulso alle ricerche analitiche dei vini siciliani e iniziare quelle di alcune malattie delle piante dell'isola. Appartengono a questo periodo della Sua attività gli studî sul *mal della cenere degli agrumi* e sul *marciume dell'uva*. Coll'autorevole collaborazione del senatore Paternò, il Briosi iniziava verso quel tempo uno studio chimico sulla *esperidina* e compiva osservazioni sui prodotti della fitosintesi della vite.

Chiamato verso il 1879 a dirigere la Stazione chimico agraria di Roma, dovette sul principio lottare contro difficoltà materiali per insufficienza di laboratorii, poichè i locali all'uopo destinati, dovettero in quel tempo essere demoliti per dar posto all'attuale Museo agrario. E fu questo certamente in qualche modo un bene nell'interesse della botanica, sebbene avesse amareggiato molto l'animo del nostro defunto collega, poichè Egli, spinto dall'amore e dalla Sua naturale disposizione al lavoro scientifico, potè dedicarsi più liberamente allo studio di problemi della pura botanica, profittando della ospitalità concessagli dall'Istituto botanico dell'Università di Roma. Come frutto di questa forma di attività vanno in prima linea ricordati gli studî sull'anatomia delle foglie e sulle particolarità morfologiche delle plantule di *Eucalyptus* e della *Cuphaea*, i quali sono degni di molta considerazione per la grande diligenza nei dettagli descrittivi e per le magnifiche figure che servono ad illustrarli.

La carica di direttore della Stazione agraria ed il soggiorno in Roma valsero ad accrescere le Sue relazioni personali con studiosi; e da uomo geniale, nel vero senso della parola, com'Egli era, seppe trar da ciò vantaggio nelle direttive della Sua attività scientifica, onde, in seguito a concorso, veniva nominato nel 1882 professore di botanica all'Università di Pavia e contemporaneamente direttore della Stazione di botanica crittogamica annessa all'Istituto botanico dell'Ateneo pavese.

Questa rappresenta l'ultima tappa della Sua carriera, e come omaggio alla Sua memoria, potremmo dire, il campo glorioso di quell'attività ammirevole onde Egli si rendeva benemerito degli studî, dell'insegnamento e dell'Istituto confidato alle Sue cure. Va detto con piena convinzione che poche volte la scelta di persone da elevarsi a determinate funzioni scientifiche apparisce ispirata a tal senso di opportunità come quella per cui il Briosi veniva assunto a quel doppio ufficio, essendo Egli soprattutto dotato di squisite qualità di organizzatore. Si sa che ogni istituzione scientifica, qualunque nome abbia, segue sempre il destino dell'uomo ed è destinata a languire se non è di continuo alimentata e tenuta desta e viva dal fuoco sacro che arde nell'animo dello scienziato. E così il Briosi a Pavia ben seppe a questa fiamma ispirare l'opera Sua, poichè ivi trovò appunto quasi

tutto da rinnovare, riparare dalle ingiurie del tempo e indirizzare verso nuove direttive più armoniche e consentanee alla ragione dei tempi e alla natura delle funzioni dell'Istituto affidato alle Sue cure. È qui che dobbiamo considerarne la figura di studioso con animo sereno, poichè Egli ivi trascorse poco meno che quarant'anni della Sua vita, i più maturi e quelli, relativamente, più fecondi.

E dobbiamo anzitutto rilevare il dubbio che la produzione scientifica personale del Briosi possa risentire un po' della influenza della grande attività di Lui nel campo delle svariate mansioni e dei molti incarichi ufficiali dipendenti dalla Sua carica di direttore di un ufficio governativo pubblico, quale era quello delle malattie crittogamiche delle piante; dubbio che potrebbe farci credere che questa funzione avesse potuto sopraffare l'ardore alla ricerca nel campo della pura scienza. Ma il Briosi seppe con ammirevole forza di sacrifizio ben conciliare i suoi doveri ufficiali con lo spirito indagatore dello scienziato, il quale per natura non tollera pastoie.

E così della Sua opera rimane traccia profonda presso l'Istituto da Lui diretto, al quale dedicò con passione tutto sè stesso, ampliando i laboratorî, costruendo delle serre, portando ovunque un soffio di modernità e di vita attiva. Come manifestazione di questo rinnovato vigore veniva da Lui iniziata la pubblicazione degli *Atti* dell'Istituto, raccogliendovi tutti i lavori compiuti dai suoi non pochi allievi per ispirazione di Lui e colla Sua diretta collaborazione e cooperazione. Questa raccolta comprende 16 volumi contenenti 250 scritti diversi, corredati da circa 300 tavole litografiche ove figurano i nomi di studiosi italiani che altamente onorano la botanica, quali un Cavara, un Pollacci, un Montemartini, un Farneti, un Tognini ecc.

A questo periodo di fecondo lavoro si riferiscono le ricerche intorno alle sostanze minerali delle foglie delle piante sempreverdi (in *Atti Ist. bot.*, Pavia 1888), molto interessanti perchè dimostrano come le sostanze delle ceneri sono variamente distribuite nel corpo vegetale, secondo la età, lo stato di sviluppo e la natura degli organi.

Nulla dirò in particolare dei molti studî compiuti in collaborazione con i suoi assistenti, studî in cui sono stati trattati svariati argomenti di anatomia e fisiologia vegetale; nè delle moltissime relazioni e rassegne intorno alle malattie crittogamiche di molte piante agrarie; e nulla pure dei numerosi rapporti ufficiali dell'opera Sua quale direttore del laboratorio crittogamico di Pavia, e dei risultati delle missioni compiute per conto del governo.

Non posso però tacere che con geniale ispirazione ogni volume degli *Atti* dell'Istituto botanico porta, quasi a titolo di presentazione, un omaggio biografico alla memoria di un insigne botanico italiano: e sono a questo riguardo notevoli i cenni biografici su Federico Delpino, su G. B. Amici, su A. Scopoli e altri.

G. Briosi in tutta la sua vita mantenne viva la fiamma dell'amore agli studî e del culto alla scienza. Sin dai primi albori della Sua esistenza, quella fiamma gli fu guida e gli procacciò onori e la stima degli studiosi. Molti sodalizî scientifici dell'Italia e dell'estero Lo ebbero caro e stimato Socio. Fu ascritto alla nostra Accademia fin dal 1896.

Moriva in Pavia il 20 luglio dello scorso anno, fra il compianto dei suoi molti scolari e colleghi. Ed anche dei molti che Lo amarono e Lo ammirarono, poichè G. Briosi fu tempra d'uomo di quelli che si sanno fare amare ed ammirare, per carattere schietto ed intimamente buono, per la geniale affabilità dei modi congiunta a semplicità. Fu un uomo di mondo per la cultura versatile e la naturale vivacità; e questo, secondo me, cooperò molto ai successi della Sua vita. La Sua figura caratteristica, dalla bella testa, dagli occhi sempre pieni di vita fresca e gioconda, rimane oggi presente al nostro pensiero; e alla memoria di Lui benedetta noi devotamente c'inchiniamo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Volterra presenta una Nota inviata dal prof. Ernesto Lebon in omaggio all'Accademia. Essa contiene la prefazione alla ristampa delle tavole dei numeri primi e della decomposizione dei numeri da 1 a 10 mila del P. Giovanni Inghirami fatta dall'editore Gauthier-Villars di Parigi. Tale ristampa fu curata dal dott. Prompt, che morì nel 1917, prima di poter preparare una notizia biografica sull'Inghirami. Questa notizia venne redatta con molta cura dall'eminente successore dell'Inghirami P. Giovanni Giovannozzi delle Scuole Pie e la traduzione di essa, fatta dal sig. Lebon, che comparisce ora nella introduzione alla ristampa delle dette tavole, è unita alla Nota che oggi si presenta all'Accademia.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Pirotta comunica il seguente

Elenco dei lavori presentati ai concorsi ai premî
del Ministero della Pubblica Istruzione per le *Scienze naturali*.

(scadenza 31 dicembre 1919. — Due premi di L. 2000 ciascuno)

1. Airaghi Carlo. 1) « Sulla scomparsa di alcuni gruppi di animali e di vegetali » (st.). — 2) « Sui molari d'elefante delle alluvioni lombarde, con osservazioni sulla filogenia e scomparsa di alcuni proboscidati » (st.).

2. Albo Giacomo. 1) « L'isola di Capo Passaro e la sua vegetazione » (st.). — 2) « La flora di Donna Lucata » (st.). — 3) « La vita delle piante vascolari nella Sicilia meridionale-orientale » (st).

3. Bezzi Mario. 1) « Il genere *Lariopogon* Loew » (st.). — 2) « Studies in Philippine diptera » (st.). — 3) « Una nuova specie etiopica del

gen. *Himantostoma* Loew (dipt.) » (st.). — 4) « New ethiopian fruit-flies of the genus Dacus » (st.). — 5) « Un nuovo genere di ditteri subatteri scoperto dal prof. A. Corti sulle somme Alpi della Valtellina » (st.). — 6) « Notes on the ethiopian fruit-flies of the family trypaneidae » ecc. (st.). — 7) « Ulteriori notizie sul gen *Himantostoma* Loew (dipt.) » (st.). — 8) « Studî sulla ditterofauna nivale delle Alpi italiane » (st.). — 9) « Una nuova specie brasiliana del genere *Anastrepha* (dipt.) » (st.). » — 10) « Descoberta de una nova mosca das fructas no Brazil » (art. su Rivista) (st.). — 11. « Two new ethiopian Lonchaeidae, with notes on other species (dipt.) (st.). — 12) « Rinvenimento di una ' Chionea ' (dipt.) nei dintorni di Torino » (st.). — 13) « New ethiopian fruit-flies of the genera tridacus ad dacus (dipt.) (st.). — 14) « Nota sul genere *Cryptochaetum* (dip.) con descrizione di una nuova specie delle Filippine » (st).

4. Cacciamali G. B. 1) « I giacimenti ferriferi del Bresciano » (st.). — 2) « Concomitanza tra fratture-rigetti e filoni metalliferi nel Bresciano » (st.) — 3) « Una falda di sovrascorrimento a San Pellegrino » (st.). — 4) « Falde alpine e loro radici; limite alpino-dinarico; pieghe dinariche » (st.). — 5) « Prolungamenti strutturali della falda carreggiata di S. Pellegrino » (ms.).

5. Cauda Adolfo. 1) « Azione simultanea del nitrato sodico e dei sali di calcio » (st.). — 2) « Gruppi vegetali fissatori di azoto » (ms.). — 3) « Metodo biologico per svelare negli schizomiceti l'attitudine a fissare l'azoto libero » (ms).

6. Colamonico Carmelo. 1) « Il pulo di Altamura » (st.). — 2) « Zone di piovosità e densità di popolazione nella provincia di Lecce » (st.). — 3) « La piovosità della Terra d'Otranto » (st.). — 4) « Le conche carsiche di Castellana in Terra di Bari » (st.). — 5) « Il pulicchio di Gravina » (st.). — 6) « Un cinquantennio di osservazioni pluviometriche a Bari » (st.) — 7) « Il bacino carsico di ' Gurio Lamanna ' nelle Murge Alte » (st.). » — 8) « Dolina di Pozzo Mancuso (Terra di Bari) » (st.). — 9. « Un anno di abbondantissima piovosità a Bari : il 1915 » (st.). — 10) « La distribuzione della popolazione in Puglia secondo la distanza del mare » (st.). — 11) « I fenomeni carsici del ' Cavone ', nelle Murge di Spinazzola » (st.). — 12) « Il ' Gurgo ' di Andria » (st.). — 13. « Una serie di doline sull'orlo del rialto marginario di Minervino » (st.). — 14) « Di alcune voragini pugliesi dette ' grave ' » (st.). — 15) « Fenomeni carsici a Pulignano » (st.). — 16) « Appunti sul clima di Acquaviva delle Fonti » (st.).

7. Comes Salvatore. 1) « Ulteriori ricerche sulla struttura della cellula cartilaginea dei mammiferi » (st.). — 2) « Di alcune particolarità di struttura del cilindrasse della fibra nervosa a doppio contorno, e del loro possibile significato funzionale » (st.). — 3) « Fenomeni di rigenerazione ed autoinnesti in larve di anfibii anuri » (st.). — 4) « Considerazioni sulla

natura mitocondriale di alcune membrane cellulari, e sul loro significato » (st.). — 5) « Il condrioma e l'apparato dittiocondriale nei corpuscoli sanguigni dell'embrione dei mammiferi » (st.). — 6) « Sull'esistenza e sul comportamento del blefaroblasto nel parassita malarico dell'uomo durante la fase asessuale del suo ciclo di sviluppo » (st.). — 7) « Il blefaroblasto del parassita malarico dell'uomo nella fase asessuale del suo ciclo di sviluppo » (ms.). — 8) « Appunti di biologia malarica. Nota 2ª: Rapporti di posizione fra il parassita malarico e l'emazia » (ms.). — 10) « Sulle relazioni fra rigenerazione e metamorfosi nelle larve di anfibii anuri » (ms.). — 11) « Nuove osservazioni sui movimenti di maneggio conseguenti alla decapitazione di alcuni artropodi » (ms.).

8. Greco Benedetto. « Fauna cretacea dell'Egitto, raccolta dal Figari Bey - III 1: Considerazioni geologiche; lamellibranchi del maestrichtiano e del Coniaciano - III 2: Lamellibranchi del Turoniano e del Cenomaniano ». (st.).

9. Mameli Eva. 1) « Lichenes » (st.). — 2) « Il legno di conifere come sostituto delle fibre di canapa nella fabbricazione delle corde » (st.). — 3) « Ricerche anatomiche e biochimiche sul *Lychnis viscaria* » (st.). — 4. « Contributo alla lichenologia del Forlivese » (ms.). — 5) « Licheni della repubblica di S. Marino » (ms.). — 6) « Affinità chimiche ed affinità morfologiche nei vegetali » (ms.). — 7) « Ricerche sulla fisiologia dei licheni » (ms.). — 8) « Licheni della Sardegna » (bozze di stampa). — 9) « Licheni della Cirenaica » (bozze di stampa). — 10) « Piante medicinali » (art. su rivista). — 11) « Piante da carta » (art. su rivista). — 12) « Flora libica » (art. su rivista).

10. Martel Edoardo. 1) « Contribuzione all'anatomia delle perule » (ms.). — 2) « Osservazioni sull'ovario infero in genere ed in particolare su quello delle *Ombrellifere* » (ms.). — 3) « Osservazioni sulla presenza di falsi setti in relazione con la placentazione » (ms.). — 4) « Deiscenza del frutto nel genere Campanula » (ms.). — 5) « Crocifere: *replum*, valve e rostro » (ms.) — 6) « Saggio di un diagramma pel fiore delle Crociflore » (ms.).

11. Sarra Raffaele. 1) « La variegana ed i suoi parassiti » (st.) — 2) « Intorno ad un imenottero tentredinide dannoso al mandorlo » (st.).

12. Ugolini Ugolino. 1) « La Poa silvicola Guss. nel Veneto e nella Lombardia ed i suoi serbatoi acquiferi » (estratto dagli Atti della R. Accademia di Padova, vol. 1919) (st.). — 2) « Curiosità della flora bresciana: note di fenologia dell'ippocastano » (bozze di stampa). — 3) « Storia naturale [dall'Annuario scientifico-industriale. Milano, Treves 1917-19] (bozze di stampa). — 4) « Piante esotiche avventizie della flora bresciana » (ms.).

Il Segretario aggiunge che al concorso al premio *Carpi* per l'anno 1919 si è presentato il prof. G. Cotronei colla Memoria; *Correlazioni e differenziazioni. Ricerche sperimentali sullo sviluppo degli Anfibi Anuri* (ms. con atl di 11 tavole).

Per il concorso al premio *Santoro* del 1919, hanno richiamato l'attenzione dell'Accademia sui propri lavori i signori: G. Cicchi, C. Gorini, R Issel, A. Petrone.

R. P.